OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALA – 21 FEBRUARIE 2016

Clasa a IX-a

Problema 1. Se consideră șirurile de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$. Dacă $3(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n)=nx_{n+1}$ și $x_n=ny_n$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$, atunci demonstrați că $(y_n)_{n\geq 1}$ este un șir progresie aritmetică.

Problema 2. Dacă notăm cu $[x]$ partea întreagă a numărului real x, atunci demonstrați că:

a) $\left[\sqrt{4n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+2}\right]$, $(\forall)n\in\mathbb{N}$;

b) $\left[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right]=\left[\sqrt{4n+1}\right]$, $(\forall)n\in\mathbb{N}$.

Problema 3. Dacă $a,\ b,\ c,\ d\in[0,+\infty)$ și $a+b+c+d=4$, atunci demonstrați că $a\sqrt{b}+b\sqrt{c}+c\sqrt{d}+d\sqrt{a}\leq 4$.

Problema 4. Se consideră triunghiul ΔABC și punctele $M\in(BC)$, $N\in(CA)$, $P\in(AB)$. Dacă $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+$ $+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$, atunci arătați că:

a) triunghiurile ΔABC și ΔMNP au același centru de greutate;

b) $(\exists)\alpha\in(0,1)$ astfel încât $\overrightarrow{BM}=\alpha\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CN}=\alpha\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}$.

SUCCES!

Subiectele au fost selectate de prof. Gheorghe Stoianovici

Baremul de notare este : Problema 1. 7 puncte; **Problema 2.** a) 3 puncte; b) 4 puncte; **Problema 3.** 7 puncte; **Problema 4. a**) 3 puncte; b) 4 puncte.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALA – 21 FEBRUARIE 2016

Clasa a X-a

Problema 1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $a^x - x^a = 1$, unde $a \in (0,1)$, a fixat;

b) $7^{2x} + 30^x = 3^{2x} + 70^x$;

c) $2^{5x} + 3^{2x} + 7^x = 3 \cdot 2016^{\frac{x}{3}}$.

Problema 2. Se consideră propozițiile P_1: „$(\exists) x,\ y \in (0,+\infty)$ asfel încât $5\left[(x+y)^2 + \log_2^2 y\right] = \left[x + \log_2\left(2^y \cdot y^2\right)\right]^2$” și P_2: „$(\exists) x \in \mathbb{R}$ și $y \in (0,+\infty)$ astfel încât $4^y = 4y(3x+4)$”.

a) Să se demonstreze că P_1 este falsă.

b) Să se demonstreze că P_2 este adevărată.

Problema 3. Se consideră $z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{C}^*$. Să se arate că:

a) dacă $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1,\ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ și $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$, atunci $|z_1 + z_2 + z_3| = 2$;

b) dacă $z_1,\ z_2,\ z_3$ sunt distincte două câte două și $(z_1+z_2)^3 = (z_2+z_3)^3 = (z_3+z_1)^3$, atunci $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$.

Problema 4. Se consideră funcția $f:\mathbb{N} \to [0,1)$, $f(n) = \left\{2^{n+\frac{1}{2}}\right\}$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a numărului real x, demonstrați că:

a) funcția f este injectivă;

b) funcția f nu este surjectivă.

SUCCES!

Subiectele au fost selectate de prof. Gheorghe Stoianovici

Baremul de notare este : Problema 1. a) 2 puncte; b) 2 puncte; c)3 puncte; **Problema 2.** a) 5 puncte; b) 2 puncte; **Problema 3.** a) 3 puncte; b) 4 puncte; **Problema 4. a**) 3 puncte; b) 4 puncte.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALA – 21 FEBRUARIE 2016

Clasa a XI-a

Problema 1. Să se arate că oricare două matrice $A,\ B \in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A^2+B^2=\begin{pmatrix} 2014 & 2015 \\ 2016 & 2017 \end{pmatrix}$ nu comută între ele.

Problema 2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Arătați că $X^3 \neq A,\ (\forall) X \in M_3(\mathbb{C})$.

Problema 3. Fie șirurile $(x_n)_{n\geq 1}$ și $(y_n)_{n\geq 1}$, definite prin $x_n=\frac{1}{2^{1^2}}+\frac{1}{2^{2^2}}+\frac{1}{2^{3^2}}+\ldots+\frac{1}{2^{n^2}}$ și $y_n=x_n+\frac{1}{2n\cdot 2^{n^2}}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$. Arată că:

a) șirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător;

b) șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent;

c) limita șirului $(x_n)_{n\geq 1}$ este un număr irațional.

Problema 4. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ șirul cu termenul general $x_n=\sqrt{n+\sqrt{n-1+\sqrt{n-2+\ldots+\sqrt{1}}}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}}=1$; .

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(x_n-\sqrt{n}\right)=\frac{1}{2}$.

SUCCES!

Subiectele au fost selectate de prof. Gheorghe Stoianovici

Baremul de notare este : Problema 1. 7 puncte; **Problema 2.** 7 puncte; **Problema 3.** a) 2 puncte; b) 2 puncte; c)3 puncte; **Problema 4. a**) 3 puncte; b) 4 puncte.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALA – 21 FEBRUARIE 2016

Clasa a XII-a

Problema 1. Fie $(G,\cdot)$ un grup finit cu proprietatea că funcția $f:G\to G,\ f(x)=x^2$ este automorfism de grupuri. Arătați că mulțimea G are un număr impar de elemente.

Problema 2. Fie $(G,\cdot)$ un grup care are elementul neutru e și mulțimea $Z(G)=\{x\in G \mid xy=yx,\ (\forall)x\in G\}$. Demonstrați că dacă $x^2=e,\ (\forall)x\in G\setminus Z(G)$, atunci grupul G este comutativ.

Problema 3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$. Dacă $f(0)=2016$ și f admite o primitivă F cu proprietatea $f(x)=2016\cdot F(x),\ (\forall)x\in\mathbb{R}$, atunci calculați $\int_0^1 f(x)\cdot F(x)dx.$

Problema 4. Dacă $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ este o funcție continuă cu proprietatea că $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\mathrm{tg}^2 x)\cdot(1+\mathrm{tg}^2 x)dx=1,$ atunci să se calculeze $\int_{-1}^{1}\frac{f(x^2)}{e^x+1}dx.$

SUCCES!

Subiectele au fost selectate de prof. Gheorghe Stoianovici

Baremul de notare este : Problema 1. 7 puncte; **Problema 2.** 7 puncte; **Problema 3.** 7 puncte; **Problema 4.** a) 7 puncte.