Examenul național de bacalaureat – propunere
Proba E. c)
Matematică M_mate-info

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore**

SUBIECTUL I – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=\dfrac{i\sqrt{3}-a}{\sqrt{3}+3i}$, $a\in\mathbb{R}$. Determinați valoarea numărului real a pentru care $z+\bar{z}=0$, unde am notat cu $\bar{z}$ conjugatul numărului complex z.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+2$ și $g(x)=mx^2+(2m-3)x+m+1$. Determinați valoarea numărului real m pentru care cele două reprezentări grafice au aceeași axă de simetrie.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-4\right)>\log_2\left(\dfrac{1}{x+2}\right)$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor divizibil cu 15.

5p **5.** Se consideră punctele $A(-1,-3)$ și $B(7,1)$. Determinați ecuația dreptei ce trece prin B și este paralelă cu OA.

5p **6.** Se consideră paralelogramul $ABCD$ cu $AB=3$, $AD=4$ și $A=\dfrac{\pi}{6}$. Calculați aria triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} m & 1 & 1\\ 1 & m & 1\\ 1 & 1 & m\end{pmatrix}$ și $\begin{cases} mx+y+z=m-1\\ x+my+z=2(m-1)\\ x+y+mz=4(m-1)\end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(0)\right)=2$.

5p **b)** Determinați valoarea reală a lui m pentru care sistemul este incompatibil.

5p **c)** Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: “Dacă sistemul admite soluția $\left(x_0,y_0,z_0\right)$ cu $x_0>0$, $y_0>0$, $z_0>0$ atunci sistemul este compatibil determinat.”

2. Pe mulțimea $G=(1,\infty)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=\dfrac{xy-1}{x+y-2}$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=\dfrac{1}{(x-1)^{-1}+(y-1)^{-1}}+1, \forall x,y\in G.$

5p **b)** Arătați că legea de compoziție este asociativă și comutativă.

5p **c)** Arătați că $\left[2^2\circ 4^2\circ 6^2\circ\ldots\circ(2n)^2\right]=3$ oricare ar fi numărul natural $n\ge 2$. Am notat cu $[a]$ partea întreagă a numărului real a.

SUBIECTUL al III-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(1,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x-1}{\ln\sqrt{x}}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{2(x\ln x-x+1)}{x\ln^2 x}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{f(x)}\right)^{\frac{1}{x-1}}$.

5p **c)** Determinați mulțimea A pentru care funcția $g:(1,\infty)\to A$, $g(x)=f(x),\forall x\in(1,\infty)$ este bijectivă.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2+mx$, $m\in\mathbb{R}^*$.

5p **a)** Determinați valoarea reală a lui m pentru care $\int\limits_0^1 f(x)dx=1$.

5p **b)** Calculați $\int\limits_{-1}^{1}\left(f(x)-f(-x)\right)e^{f(x)+f(-x)}dx$.

5p **c)** Determinați o primitivă H a funcției $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},h(x)=\left(f(x)+f(-x)\right)e^{f(x)-f(-x)}$ cu proprietatea $H(0)=0$.

Examenul național de bacalaureat – propunere
Proba E. c)
Matematică M_mate-info
BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\bar{z}=-z \Rightarrow \operatorname{Re} z=0$ $a=3$	**3p** **2p**
2.	Ecuația axei de simetrie este $x=-\frac{b}{2a}$. Obținem $\frac{m}{2}=-\frac{2m-3}{2m}$ Soluție m=-3 deoarece pentru m=1 funcțiile sunt egale.	**3p** **2p**
3.	Inecuația devine $-\log_2(x^2-4)>-\log_2(x+2) \Leftrightarrow -\log_2(x-2)>0$ Soluție $x\in(2,3)$	**3p** **2p**
4.	Numărul cazurilor posibile = 90 Numărul cazurilor favorabile 15 (35, 53, 65, 56, 95, 59, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90) $p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{15}{90}=\frac{1}{6}$	**2p** **2p** **1p**
5.	$m_{OA}=3$, ecuația dreptei: $y-y_B=m_{OA}(x-x_B)$ finalizare	**3p** **2p**
6.	Aria triunghiului $A=\frac{AB\cdot BC\cdot\sin B}{2}=\frac{AB\cdot BC\cdot\sin A}{2}=$ finalizare	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $\det(A(0))=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=0+1+1-0-0-0$	**3p**
	$=2$	**2p**
	b) $\det(A(m))=\begin{vmatrix}m&1&1\\1&m&1\\1&1&m\end{vmatrix}=(m+2)\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&m&1\\1&1&m\end{vmatrix}=(m+2)(m-1)^2$	**2p**
	Pentru m=1 sistemul este compatibil nedeterminat și pentru m=-2 sistemul este incompatibil.	**3p**

	c) Adunând ecuațiile sistemului obținem $(m+2)\cdot(x+y+z)=7(m-1)$. Conform ipotezei sistemul are cel puțin o soluție deci $m\neq-2$. Obținem $\frac{m-1}{m+2}>0$	**3p**
	finalizare	**2p**
2.	**a)** $\frac{1}{(x-1)^{-1}+(y-1)^{-1}}+1=\frac{(x-1)(y-1)}{x-1+y-1}+1=$	**3p**
	finalizare	**2p**
	b) comutativitate	**2p**
	asociativitate	**3p**
	c) $2^2\circ4^2\circ6^2\circ\ldots\circ(2n)^2=\frac{1}{(2^2-1)^{-1}+(3^2-1)^{-1}+\ldots+(4n^2-1)^{-1}}+1$	**3p**
	finalizare	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $f'(x)=\frac{1\cdot\frac{\ln x}{2}-(x-1)\cdot\frac{1}{2x}}{\left(\frac{1}{2}\ln x\right)^2}$	**3p**
	Obținerea rezultatului	**2p**
	b) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{\ln x}{x-1}\right)^{\frac{1}{x-1}}\overset{1^\infty}{=}\lim\limits_{x\to1}\left(1+\frac{\ln x-x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}\right)}$	**3p**
	Obținerea rezultatului $e^{-\frac{1}{2}}$	**2p**
	c) mulțimea A este imaginea funcției continue g	**1p**
	$\lim\limits_{x\to1}(g(x))=\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{2(x-1)}{\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{2}{1/x}\right)=2$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to\infty}(g(x))=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2(x-1)}{\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{1/x}\right)=\infty\Rightarrow A=(2,\infty)$	**2p**
2.	**a)** $\int_0^1 f(x)dx=\left(\frac{x^3}{3}+m\frac{x^2}{2}\right)\Big\|_0^1=\left(\frac{1^3}{3}+m\frac{1^2}{2}\right)$	**3p**
	finalizare	**2p**
	b) $g(x)=(f(x)-f(-x))e^{f(x)+f(-x)}=2mxe^{2x^2}$	**2p**
	g este funcție impară, deci $\int_{-1}^{1}g(x)dx=0$	**3p**
	c) $\int h(x)dx=\int 2x^2e^{2mx}dx=\frac{x^2}{m}e^{2mx}-\int\frac{2x}{m}e^{2mx}dx=e^{2mx}\left(\frac{x^2}{m}-\frac{x}{m^2}+\frac{1}{2m^3}\right)+C$	**3p**
	Determinarea primitivei	**2p**