

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

CLASA a V-a

1. Se consideră mulțimea $A = \{2^x \cdot 3^y \cdot 7^z \mid x, y, z \in \mathbb{N}\}$.

a) Arătați că $2016 \in A$.

b) Demonstrați că produsul oricăror două elemente din A aparține mulțimii A .

c) Dacă $B = \{2^x \cdot 3^y \mid x, y \in \{1; 2; 3\}\}$ este o submulțime a lui A , demonstrați că cele 9 elemente distincte din B pot fi așezate într-o tablă pătrată 3×3 astfel încât produsul elementelor de pe fiecare linie (orizontală) și coloană (verticală) să fie același.

Soluție și barem:

OFICIU	1p									
a) Avem $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^1$; prin urmare $2016 \in A$.	1p									
b) Fie $a = 2^x \cdot 3^y \cdot 7^z$ și $b = 2^m \cdot 3^n \cdot 7^p$ cu $x, y, z, m, n, p \in \mathbb{N}$ două elemente din A . Atunci $a \cdot b = 2^{x+m} \cdot 3^{y+n} \cdot 7^{z+p} \in A$	2p									
c) Elementele lui B sunt: $2^1 \cdot 3^1; 2^1 \cdot 3^2; 2^1 \cdot 3^3; 2^2 \cdot 3^1; 2^2 \cdot 3^2; 2^2 \cdot 3^3; 2^3 \cdot 3^1; 2^3 \cdot 3^2; 2^3 \cdot 3^3$.	1p									
Produsul tuturor celor 9 elemente ale tablei este egal cu $2^{18} \cdot 3^{18}$ și prin urmare produsul elementelor de pe fiecare linie / coloană va fi egal cu $2^6 \cdot 3^6$.	3p									
O aranjare posibilă poate fi: <table><tr><td>$2^1 \cdot 3^3$</td><td>$2^2 \cdot 3^1$</td><td>$2^3 \cdot 3^2$</td></tr><tr><td>$2^2 \cdot 3^2$</td><td>$2^3 \cdot 3^3$</td><td>$2^1 \cdot 3^1$</td></tr><tr><td>$2^3 \cdot 3^1$</td><td>$2^1 \cdot 3^2$</td><td>$2^2 \cdot 3^3$</td></tr></table>	$2^1 \cdot 3^3$	$2^2 \cdot 3^1$	$2^3 \cdot 3^2$	$2^2 \cdot 3^2$	$2^3 \cdot 3^3$	$2^1 \cdot 3^1$	$2^3 \cdot 3^1$	$2^1 \cdot 3^2$	$2^2 \cdot 3^3$	2p
$2^1 \cdot 3^3$	$2^2 \cdot 3^1$	$2^3 \cdot 3^2$								
$2^2 \cdot 3^2$	$2^3 \cdot 3^3$	$2^1 \cdot 3^1$								
$2^3 \cdot 3^1$	$2^1 \cdot 3^2$	$2^2 \cdot 3^3$								

2. Determinați numerele de forma \overline{abcd} care prin împărțire la produsul numerelor \overline{ab} și \overline{cd} dau restul egal cu 0.

Soluție și barem:

Fie $\overline{abcd} = k \cdot \overline{ab} \cdot \overline{cd}$, cu $k \in \mathbb{N}^*$.	1p
Obținem $\overline{ab} \cdot 100 + \overline{cd} = k \cdot \overline{ab} \cdot \overline{cd} \Rightarrow \overline{ab} \mid \overline{cd}$, deci există $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\overline{cd} = m \cdot \overline{ab}$ și	2p

evident $m \leq 9$.	
Înlocuind rezultă $\overline{ab} \cdot 100 + m \cdot \overline{ab} = k \cdot \overline{ab} \cdot m \cdot \overline{ab}$ sau $m \cdot (k \cdot \overline{ab} - 1) = 100$ deci $m \mid 100$ și cum $m \leq 9$ obținem $m \in \{1; 2; 4; 5\}$.	4p
Verificând valorile lui m rezultă soluții doar pentru: $m = 2 \Rightarrow \overline{abcd} = 1734$; $m = 4 \Rightarrow \overline{abcd} = 1352$.	2p

3. Dacă $s(x)$ reprezintă suma cifrelor numărului natural x , determinați numărul elementelor mulțimii $M = \{s(A+5) \mid s(A) = 2016\}$.

Soluție și barem:

OFICIU	1p
Fie $A = \overline{c_1 c_2 \dots c_n}$, unde c_i sunt cifre și $c_1 \neq 0$.	
Dacă $c_n \leq 4$, atunci $A+5 = \overline{c_1 c_2 \dots c_{n-1} (c_n + 5)} \Rightarrow s(A+5) = c_1 + c_2 + \dots + c_n + 5 = 2016 + 5 = 2021$.	2p
Dacă $c_n \geq 5$, atunci pentru $c_{n-1} \neq 9$ rezultă $A+5 = \overline{c_1 c_2 \dots c_{n-2} (c_{n-1} + 1) (c_n + 5 - 10)}$, deci $s(A+5) = c_1 + c_2 + \dots + c_{n-2} + c_{n-1} + 1 + c_n + 5 - 10 = 2016 - 4 = 2012$	2p
Dacă $c_n \geq 5$ și dacă există $p \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq n-1$ astfel încât $c_p = c_{p+1} = \dots = c_{n-1} = 9$, atunci $A+5 = \overline{c_1 c_2 \dots c_{p-2} (c_{p-1} + 1) \underbrace{00 \dots 0}_{n-p} (c_n + 5 - 10)} \Rightarrow s(A+5) = c_1 + c_2 + \dots + c_{p-2} + c_{p-1} + c_n + 1 - 5 =$ $= s(A) - 9(n-p) - 4 = 2012 - 9(n-p)$	3p
Cum $1 \leq n-p \leq 223$, vom obține că $s(A)$ mai poate lua încă 223 de valori distincte. În concluzie $\text{card } M = 1 + 1 + 223 = 225$.	2p