

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

CLASA a VII-a

1. Arătați că dacă $a, b, c > 0$ verifică $\frac{a^2+b^2}{c(a+b)} = \frac{b^2+c^2}{a(b+c)} = \frac{c^2+a^2}{b(c+a)}$, atunci $a=b=c$.

Soluție și barem:

OFICIU	1p
$\frac{a^2+b^2}{c(a+b)} = \frac{b^2+c^2}{a(b+c)} = \frac{c^2+a^2}{b(c+a)} = \frac{2(a^2+b^2+c^2)}{2(ab+bc+ca)} = \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} =$	2p
$= \frac{c^2}{ab} = \frac{a^2}{bc} = \frac{b^2}{ca} =$	3p
$= \frac{c^3}{abc} = \frac{a^3}{abc} = \frac{b^3}{abc} \Rightarrow$	2p
$\Rightarrow a^3 = b^3 = c^3 \Rightarrow a = b = c$	2p

2. Să se determine numerele naturale x, y, z astfel încât $11^x - 2^y = z^2 = 7^x + 2^y$.

Soluția 1 și barem:

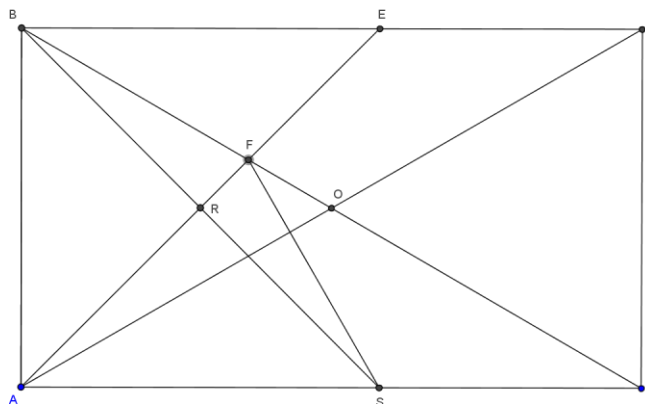
OFICIU	1p
Din relația $11^x - 2^y = 7^x + 2^y$, avem $11^x - 7^x = 2^{y+1}$. (1)	1p
Modulo 3 obținem $(-1)^x - 1 = (-1)^{y+1}$, de unde x este impar, deci $(-1)^{y+1} = -2 = 1 \pmod{3}$, adică și y este impar.	2p
Dacă $y \geq 2$, atunci $2^{y+1} \equiv 0 \pmod{8}$ și ecuația (1) devine $3^x - (-1)^x = 0 \pmod{8}$; cum x este impar, deci $x = 2a + 1$, cu $a \in \mathbb{N}$, obținem $3^{2a+1} - (-1) \equiv 0 \pmod{8}$, deci $3 \cdot 9^a \equiv -1 \pmod{8} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3 \equiv 7 \pmod{8}$, fals. Așadar $y \in \{0; 1\}$ și cum y este impar deducem că $y = 1$.	4p
Prin urmare rezultă ecuația $11^x = 7^x + 4$, cu soluția $x = 1$. Dacă ultima ecuație ar avea și alte soluții s-ar obține $\left(\frac{7}{11}\right)^x + \frac{4}{11^x} = 1$, ceea ce este fals, câtă vreme, pentru $x > 2$, rezultă $\left(\frac{7}{11}\right)^x + \frac{4}{11^x} < \left(\frac{7}{11}\right)^2 + \frac{4}{11^2} = \frac{53}{121} < 1$. Așadar $y = 1$, $x = 1$ și deci $z = 3$. Sau se putea utiliza faptul că $(a+b)^n > a^n + b^n$, pentru orice $a, b \in \mathbb{N}^*$ și pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.	2p

Solutia 2 și barem:

OFICIU	1p
<p>Din relația $11^x - 2^y = 7^x + 2^y$, avem $11^x - 7^x = 2^{y+1}$ (1)</p> <p>Pentru $x = 0$, obținem $2^{y+1} = 0$, ceea ce nu este posibil.</p> <p>Pentru $x = 1$, obținem $y = 1$ și $z = 3$.</p>	1p
<p>Presupunem în continuare că $x \geq 2$. Avem $11 = \mathcal{M}_8 + 3$ și $7 = \mathcal{M}_8 - 1$. Arătăm că x este număr natural par.</p> <p>Dacă x este impar, $x \geq 3$, atunci $11^x = \mathcal{M}_8 + 3$ și $7^x = \mathcal{M}_8 - 1$, deci $11^x - 7^x = \mathcal{M}_8 + 4$.</p> <p>Prin urmare $2^{y+1} = \mathcal{M}_8 + 4$, adică $y = 1$. În aceste condiții (1) devine $11^x - 7^x = 4$, ceea ce nu este posibil pentru că $11^x - 7^x = 4(11^{x-1} + \dots + 7^{x-1}) \geq 4(11^2 + 7^2) > 4$.</p> <p>Prin urmare $x \geq 2$ este număr natural par. Fie $x = 2n$, $n \in \mathbb{N}^*$.</p>	4p
<p>Relația (1) devine $(11^n - 7^n)(11^n + 7^n) = 2^{y+1}$ (2)</p> <p>Fie $d = (11^n - 7^n; 11^n + 7^n)$, care este număr par. Rezultă că $d \mid (11^n - 7^n + 11^n + 7^n)$, adică $d \mid 2 \cdot 11^n$. Deoarece $d \mid 2 \cdot 11^n$, $d \mid 2^{y+1}$, 11^n este impar și d este par, rezultă că $d = 2$.</p>	2p
<p>În aceste condiții, din (2), obținem $\begin{cases} 11^n - 7^n = 2 \\ 11^n + 7^n = 2^y \end{cases}$ (3)</p> <p>Prin adunarea celor două relații rezultă $11^n = 1 + 2^{y-1}$ sau $11^n - 1 = 2^{y-1}$ sau $10(11^{n-1} + 11^{n-2} + \dots + 11 + 1) = 2^{y-1}$, ceea ce nu este posibil pentru că 2^{y-1} nu se divide prin 10. În concluzie soluția ecuației este $x = y = 1, z = 3$.</p>	2p

3. În dreptunghiul $ABCD$ se consideră AE bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAD$, cu $E \in (BC)$. Dacă $AE \cap BD = \{F\}$ și $(BF) \equiv (EC)$, atunci determinați măsura unghiului $\sphericalangle EAC$.

Soluție și barem:



OFICIU	1p
<p>Fie $BS \perp AE$, $S \in AD$, $AC \cap BD = \{O\}$ și $BS \cap AE = \{R\}$.</p> <p>În triunghiul BAS, $[AR]$ este bisectoare și înălțime, deci $AB = AS$ și rezultă că AR este mediatoarea segmentului $[BS]$.</p> <p>Triunghiul ABE este dreptunghic isoscel, deci $AB = BE$. Rezultă $AS = AB = BE$.</p> <p>Deoarece $AD = BC$ și $BE < BC$ deducem că $AS < AD$, deci $S \in (AD)$ și $SD = EC$.</p>	4p
<p>Avem $FB = FS$, întrucât AR este mediatoarea segmentului $[BS]$ și $F \in AR$; dar $BF = EC = SD$, deci $FS = SD$ și prin urmare triunghiul FSD este isoscel.</p> <p>$\sphericalangle FSA$ este exterior triunghiului isoscel FSD, deci $m(\sphericalangle FSA) = 2 \cdot m(\sphericalangle SDF)$. (1)</p> <p>$\triangle AFB \equiv \triangle AFS$ (L.L.L.), de unde $\sphericalangle ABF \equiv \sphericalangle ASF$. (2)</p>	3p
<p>Din (1) și (2) obținem $m(\sphericalangle ABD) = 2 \cdot m(\sphericalangle ADB)$ și cum, în triunghiul dreptunghic ABD, avem $m(\sphericalangle ABD) + m(\sphericalangle ADB) = 90^\circ$ va rezulta că $m(\sphericalangle ABD) = 60^\circ$. Deci triunghiul ABO este echilateral, de unde concluzionăm că $m(\sphericalangle BAO) = 60^\circ$ și prin urmare $m(\sphericalangle EAC) = 15^\circ$.</p>	2p