

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

CLASA a VIII-a

1. Fie expresia $E = \sqrt{(a+b)(a+c)} + \sqrt{(b+c)(b+d)} + \sqrt{(c+d)(c+a)} + \sqrt{(d+a)(d+b)}$, unde $a, b, c, d > 0$. Să se demonstreze că:
- a) $E \leq 2(a+b+c+d)$.
- b) $E \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{cd} + \sqrt{da}$.

Soluție și barem:

OFICIU	1p
a) Folosind inegalitatea mediilor, avem $\sqrt{(a+b)(a+c)} \leq \frac{a+b+a+c}{2} = a + \frac{b+c}{2}$ și analoagele: $\sqrt{(b+c)(b+d)} \leq b + \frac{c+d}{2}$, $\sqrt{(c+d)(c+a)} \leq c + \frac{d+a}{2}$ și respectiv $\sqrt{(d+a)(d+b)} \leq d + \frac{a+b}{2}$. Prin însumarea celor patru inegalități se obține concluzia.	2p
b) Avem $(a+b)(a+c) = a^2 + a(b+c) + bc \geq a^2 + 2a\sqrt{bc} + bc = (a + \sqrt{bc})^2$, (am folosit inegalitatea mediilor: $b+c \geq 2\sqrt{bc}$) și analoagele: $(b+c)(b+d) \geq (b + \sqrt{cd})^2$, $(c+d)(c+a) \geq (c + \sqrt{da})^2$ și respectiv $(d+a)(d+b) \geq (d + \sqrt{ab})^2$. Prin însumarea celor patru inegalități rezultă $E \geq a+b+c+d + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{cd} + \sqrt{da}$.	4p
Pentru a demonstra inegalitatea din enunț este suficient să arătăm că $a+b+c+d \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{cd} + \sqrt{da} \Leftrightarrow 2a+2b+2c+2d - 2\sqrt{ab} - 2\sqrt{bc} - 2\sqrt{cd} - \sqrt{da} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 + (\sqrt{b}-\sqrt{c})^2 + (\sqrt{c}-\sqrt{d})^2 + (\sqrt{d}-\sqrt{a})^2 \geq 0$ Ultima inegalitate este evident adevărată.	3p

2. Se consideră numărul $N = \frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - ab + b^2}$, unde a și b sunt numere raționale pozitive.

Arătați că $N \in \mathbb{N}$ dacă și numai dacă $a = b$.

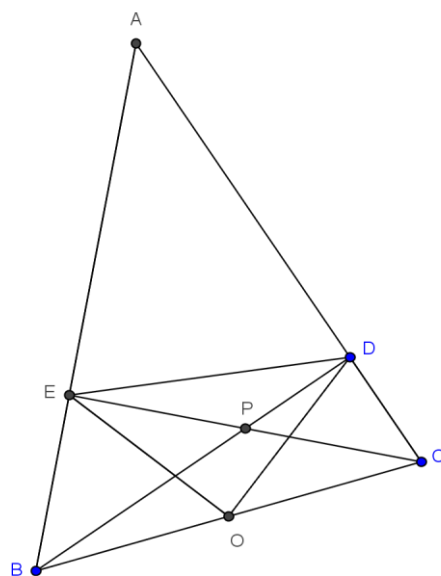
Soluție și barem:

OFICIU	1p
Dacă $a = b$, atunci $N = 3 \in \mathbb{N}$.	1p
Presupunem că $N \in \mathbb{N}$. Avem $N = \frac{a^2 + ab + b^2}{a^2 - ab + b^2} = 1 + \frac{2ab}{a^2 - ab + b^2} \leq 1 + \frac{2ab}{ab} = 3$. Deducem că $N \in \{1, 2, 3\}$.	3p
Dacă $N = 1$, obținem $ab = 0$, contradicție.	2p

Pentru $N = 2$, obținem $a^2 - 3ab + b^2 = 0$, echivalent cu $\left(a - \frac{3b}{2}\right)^2 - \frac{5b^2}{4} = 0$.	2p
Descompunând diferența de pătrate avem $a = b \cdot \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Prin urmare a și b nu pot fi simultan raționale.	
Pentru $N = 3$, obținem relația echivalentă $(a - b)^2 = 0$, deci $a = b$.	1p

3. În triunghiul ascuțitunghic ABC se consideră înălțimile $[BD]$ și $[AC]$, unde $D \in [AC]$ și $E \in [AB]$. Dacă $EC = 2EB$ și $BD = 3DC$, atunci determinați măsura unghiului $\sphericalangle BAC$.

Soluție și barem:



OFICIU	1p
<p>Fie $BD \cap CE = \{P\}$. Notăm $EB = a$, $DC = b$. Avem $EC = 2a$ și $BD = 3b$.</p> <p>În triunghiul BEC ($m(\sphericalangle E) = 90^\circ$), din Teorema lui Pitagora, obținem $BC = a\sqrt{5}$. Analog în triunghiul dreptunghic BDC rezultă $BC = b\sqrt{10}$. Din aceste relații deducem că $a = b\sqrt{2}$ și deci $EB = b\sqrt{2}$ și $EC = 2b\sqrt{2}$.</p> <p>Patrulaterul $BEDC$ este inscriptibil și conform Teoremei lui Ptolemeu rezultă $BD \cdot EC = BE \cdot DC + DE \cdot BC \Rightarrow 3b \cdot 2b\sqrt{2} = b\sqrt{10} \cdot ED + b \cdot b\sqrt{2} \Rightarrow ED = b\sqrt{5}$.</p>	2p
<p>Fie O mijlocul segmentului $[BC]$. În triunghiul dreptunghic BEC, $[EO]$ este mediană, deci $EO = \frac{BC}{2} = \frac{b\sqrt{10}}{2}$. Similar, în triunghiul dreptunghic BDC, $[DO]$ este mediană, deci $DO = \frac{BC}{2} = \frac{b\sqrt{10}}{2}$.</p> <p>În trunghiul EOD avem $EO^2 + DO^2 = ED^2 \Leftrightarrow \left(\frac{b\sqrt{10}}{2}\right)^2 + \left(\frac{b\sqrt{10}}{2}\right)^2 = (b\sqrt{5})^2$, adevărat, deci, conform reciprocei Teoremei lui Pitagora, rezultă $m(\sphericalangle EOD) = 90^\circ$.</p>	3p

<p>Triunghiul BOD este isoscel ($DO = BO$), deci $m(\sphericalangle DOC) = 2 \cdot m(\sphericalangle DBC) = 2 \cdot m(\sphericalangle PBC)$.</p> <p>Și triunghiul EOC este isoscel ($EO = CO$), deci $m(\sphericalangle EOB) = 2 \cdot m(\sphericalangle ECB) = 2 \cdot m(\sphericalangle PCB)$.</p> <p>Cum $m(\sphericalangle EOD) = 90^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle EOB) + m(\sphericalangle DOC) = 90^\circ$ și deci $m(\sphericalangle PCB) + m(\sphericalangle PBC) = 45^\circ$.</p>	2p
<p>$\sphericalangle EPB$ este exterior triunghiului BPC și rezultă $m(\sphericalangle EPB) = m(\sphericalangle PCB) + m(\sphericalangle PBC) = 45^\circ$.</p> <p>Deoarece $m(\sphericalangle AED) + m(\sphericalangle ADP) = 180^\circ$ obținem că patrulaterul $AEPD$ este inscriptibil.</p> <p>Așadar $m(\sphericalangle EAD) = m(\sphericalangle EPB) = 45^\circ$, de unde concluzionăm că $m(\sphericalangle BAC) = 45^\circ$.</p>	2p