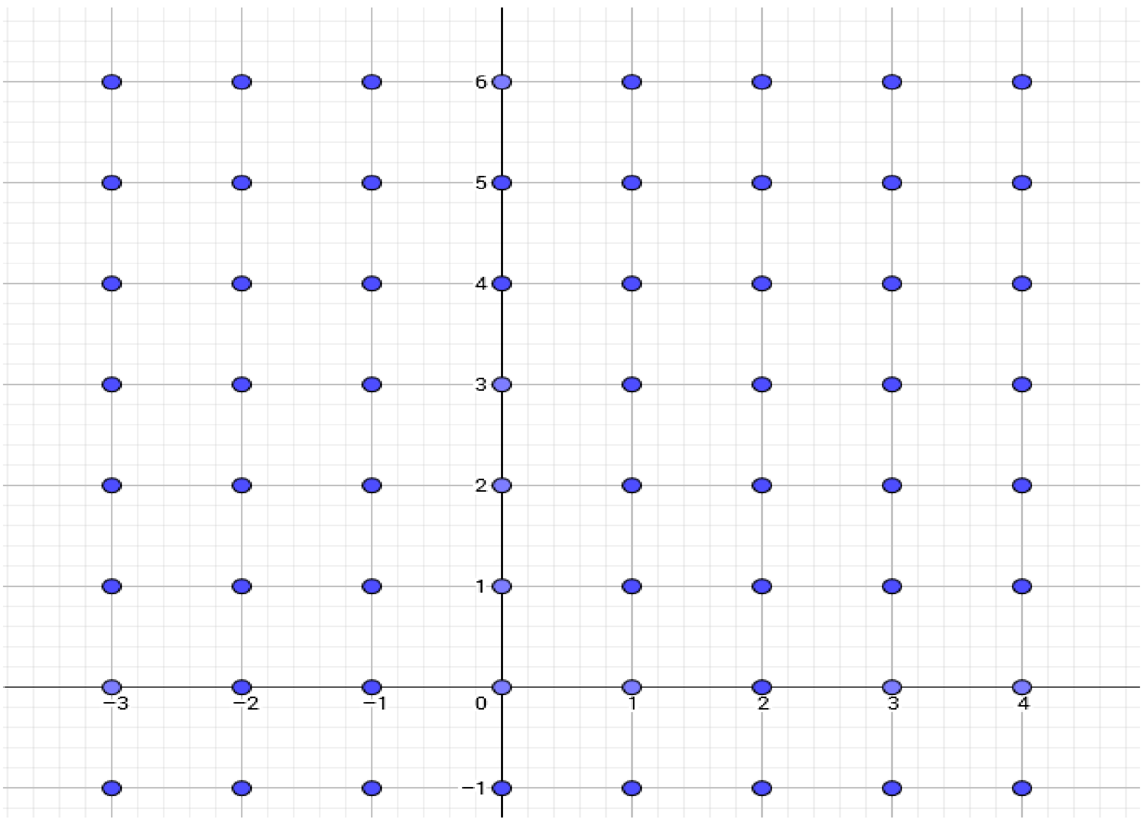
Rețele laticeale în matematica de gimnaziu

Gabriela Elena Ruse

Profesor de matematică

Școala Gimnazială ”Mihai Viteazul”, Călărași



Rețea laticeală

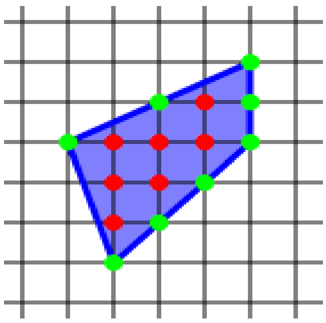
Dacă xOy este un sistem ortogonal într-un plan, atunci elementele mulțimii $L=\{(x,y)|x\in\mathbb{Z}\wedge y\in\mathbb{Z}\}$ se numesc *puncte laticeale*, iar mulțimea L se numește *rețea laticeală* în plan. Într-o rețea laticeală, punctele laticeale se mai numesc și *noduri ale rețelei*.

Teorema lui Pick

Având un poligon convex cu vârfurile situate în nodurile unei rețele laticeale, dacă i reprezintă numărul de puncte laticeale situate în interiorul poligonului, iar p reprezintă numărul de puncte laticeale situate pe laturile poligonului, atunci aria poligonului este dată de formula:

$$A_{poligon}=i+\frac{p}{2}-1$$

Teorema a fost formulată de Georg Alexander Pick în 1899. Demonstrația poate fi găsită în [5].



$$i=7,\ \ p=8,\ \ A=7+\frac{8}{2}-1\Rightarrow A=10$$

Elevii de gimnaziu, de clasa a VII-a și a VIII-a, pot rezolva o multitudine de probleme în care apar puncte laticeale: probleme legate de distanțe între puncte, de arii ale unor poligoane cu vârfurile în nodurile rețelei, de minim al unui drum format din segmente cu extremități în nodurile rețelei, de simetrii și multe altele. Este benefică pentru educația matematică a unui elev studierea unor astfel de probleme, deoarece pentru rezolvarea lor se împletesc armonios competențele dobândite prin studiul algebrei și geometriei.

Urmează prezentarea unor probleme în care se utilizează punctele laticeale, iar diversele lor metode de rezolvare sunt concepute pentru nivelul claselor a VII-a și a VIII-a.

Probleme rezolvate

Problema 1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+4$. [...]

b) În sistemul de axe de coordonate xOy se consideră punctul $D(0,-1)$. Determinați distanța de la punctul D la graficul funcției *f*.

(Evaluarea Națională, 2018, Varianta 6- extrasă)

Soluție

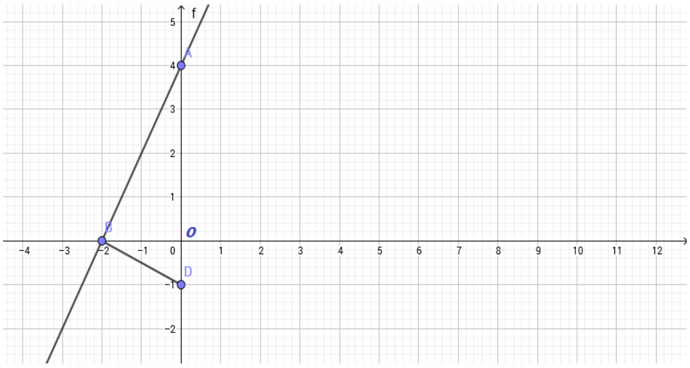
Determinăm intersecțiile graficului funcției *f* cu axele sistemului xOy.

$x=0\Rightarrow f(0)=4, A(0,4)\in G_f\cap Ox$;

$f(x)=0 \Rightarrow 2x+4=0 \Rightarrow x=-2, B(-2,0)\in G_f \cap Oy$.

Observăm că cele trei puncte, A, B și D sunt vârfurile unui triunghi dreptunghic. Acest lucru poate fi demonstrat prin reciproca teoremei lui Pitagora sau prin reciproca teoremei înălțimii. Într-adevăr, *BO* este înălțime în triunghiul *ABD*, *BO=2*, *OD=1*, *OA=4*, iar $BO^2 = AO \cdot OD$. Conform reciprocei teoremei înălțimii, triunghiul ABD este dreptunghic în $\sphericalangle$ D.

Distanța de la D la dreapta AB este DB, iar $DB=\sqrt{(-2)^2+(1)^2}=\sqrt{5}$.



Problema 2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+2$. [...]

b) În sistemul de axe de coordonate xOy, punctul $C(a,b)$ este situat pe graficul funcției *f*. Determinați numerele întregi *a* și *b*, știind că distanța de la punctul *C* la axa Ox este egală cu 7.

(Evaluarea Națională, 2018, Varianta 4- rezervă)

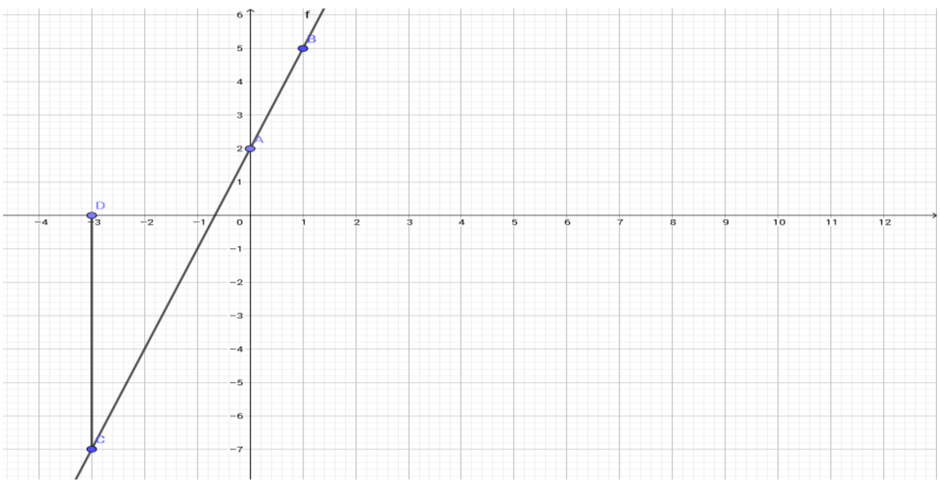
Soluție

Observăm că $C(a,b)\in G_f \Leftrightarrow f(a)=b \Leftrightarrow 3a+2=b$.

Distanța de la punctul C la axa Ox este egală cu modulul ordonatei punctului C.

$|3a+2|=7 \Rightarrow (3a+2=7)\vee(3a+2=-7) \Rightarrow a=\frac{5}{3} \vee a=-3$.

Cum C este un nod al rețelei laticeale, avem $a=-3 \wedge b=-7$.

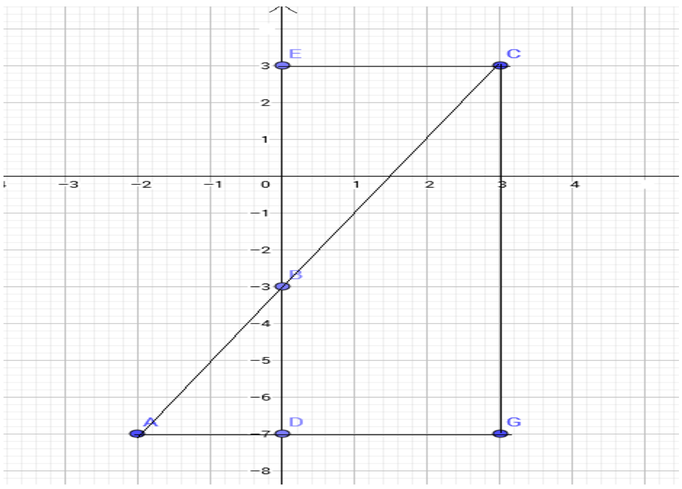


Problema 3. Într-un sistem de axe ortogonale xOy se consideră punctele $A(-2,-7)$, $B(0,-3), C(3,3)$. Demonstrați că A, B, C sunt coliniare.

Soluție

Punctele D și E sunt proiecțiile punctelor A, respectiv C pe axa Oy. Paralela prin A la Ox se intersectează cu paralela prin C la Oy în punctul G. ΔADB este dreptunghic în D, AD=2 , DB=4. ΔBEC este dreptunghic în E, BE=6 , EC=3.

Conform criteriului II de asemănare, avem $\Delta ADB \sim \Delta CEB$. De aici, $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CBE$ și cum D, B, E sunt coliniare, aplicând reciproca teoremei unghiurilor opuse la vârf, obținem A, B, C puncte coliniare.

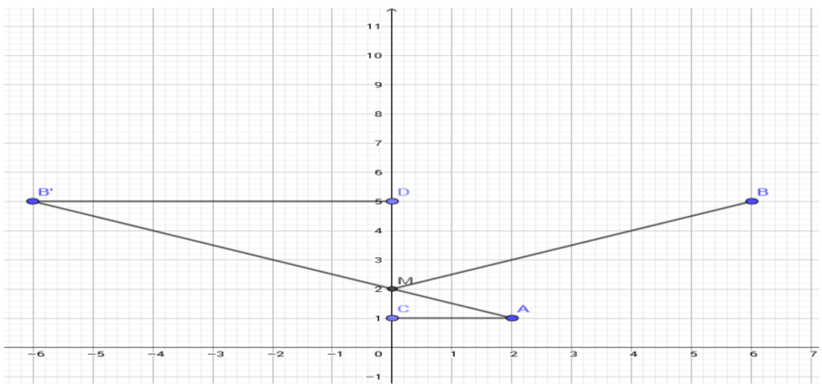


Problema 4. Într-un sistem de axe ortogonale xOy se consideră punctele $A(2,1), B(6,5)$. Determinați ordonata punctului M situat pe axa Oy astfel încât $AM+MB$ să fie minimă.

Soluție

Construim simetricul unuia dintre punctele A, B față de axa Oy. De exemplu, $B' = sim_{Oy} B$.

Cum axa Oy este mediatoarea segmentului BB', avem BM=B'M. Obținem egalitatea $AM+MB = AM+MB'$. Suma $AM+MB'$ este minimă când punctele A, M, B'sunt coliniare.



Proiectând punctele A și B' pe axa Oy în punctele C, respectiv D, se obțin triunghiurile asemenea $\Delta MAC \sim \Delta MB'D$. Din șirul de rapoarte egale $\frac{AC}{B'D} = \frac{MC}{MD} = \frac{1}{3}$, obținem MC=1, deci punctul M are coordonatele $M\left(0,2\right)$.

Problema 5. Într-un plan se consideră sistemul de axe ortogonale xOy și punctele $A(2,5), B(9,7), C(10,11)$. Determinați mulțimea punctelor D din plan, cu proprietatea că au coordonate întregi și A, B, C, D sunt vârfurile unui paralelogram.

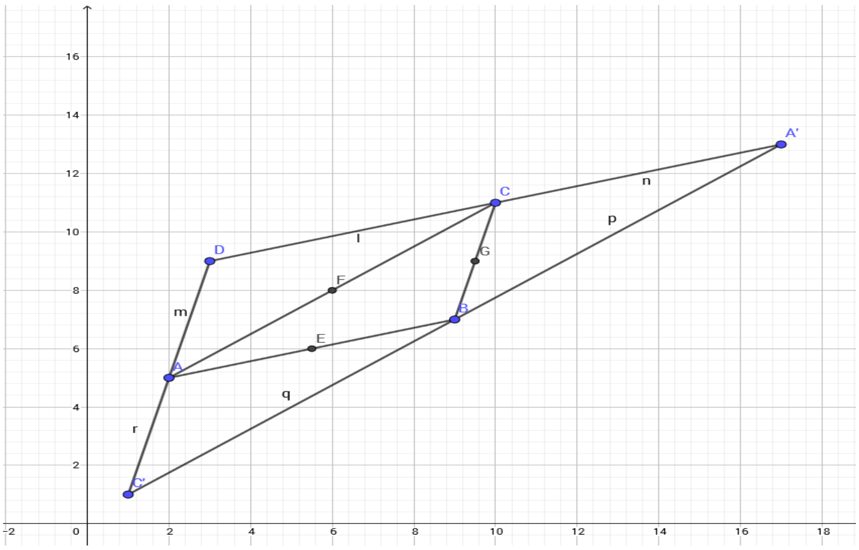
Soluție

Știind că într-un paralelogram, punctul de intersecție al diagonalelor este mijlocul fiecărei diagonale, considerăm pe rând, diagonală, pe AC, AB și pe BC.

Dacă [AC] este diagonală, iar F este mijlocul său, obținem $F\left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2}\right)$, adică $F(6,8)$. Cum F este mijlocul lui [BD], obținem $D(3,9)$.

Dacă [AB] este diagonală, iar E este mijlocul său, obtinem $E\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$, adică $E(5{,}5,\ 6)$. Notăm paralelogramul ACBC'. Cum E este mijlocul lui [CC'], obținem $C'(1,1)$.

Dacă [BC] este diagonală, iar G este mijlocul său, obținem $G\left(9{,}5,\ 9\right)$. Notăm paralelogramul ABA'C, iar G este și mijlocul lui [AA']. Obținem astfel $A'(17,13)$.



În plus, dacă A, B, C sunt puncte laticeale, se observă că există alte trei puncte laticeale care, pe rând, formează cu punctele A, B și C câte un paralelogram.

Problema 6. Fie punctele $A(5,3)$ și $B(2,0)$ într-un plan.

a) Reprezentați în sistemul de axe perpendiculare xOy punctele A și B.

b) Fie A' simetricul punctul A față de axa ordonatelor din sistemul de axe perpendiculare xOy. Calculați aria triunghiului ABA'.

c) Calculați valoarea numărului real m știind că punctele A, B și $C(m, 2m+1)$ sunt coliniare.

(Subiect publicat pentru Testarea Națională 2007, Varianta 45, exercițiul 14)

Soluție

a), b) Punctul A' are coordonatele (-5,3). Dreapta AA' este paralelă cu axa Ox, iar distanța de la B la AA' este egală cu distanța dintre Ox și AA', adică este de 3 unități.

$$A_{\Delta AA'B} = \frac{AA' \cdot d(B, AA')}{2} = \frac{10 \cdot 3}{2} = 15 \ (\text{u}^2).$$

c) AB este reprezentarea grafică a unei funcții de forma $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$. Din condițiile ca A și B să aparțină acestei reprezentări grafice, obținem:

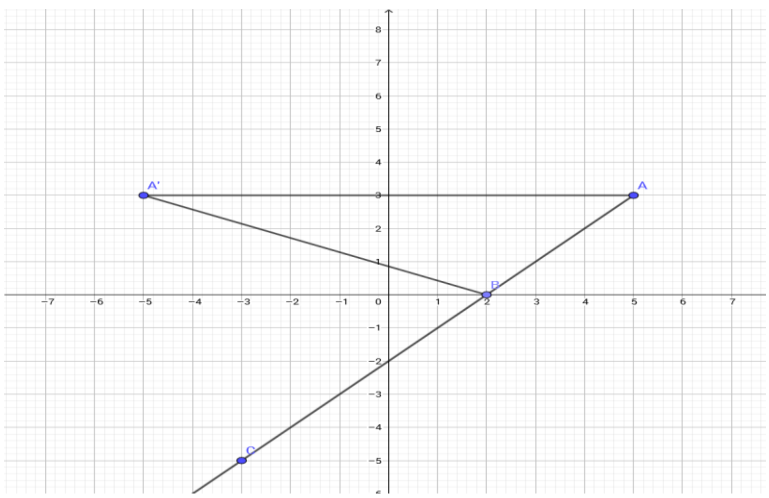
$A(5,3) \in G_f \Leftrightarrow f(5) = 3 \Leftrightarrow 5a + b = 3$; $B(2,0) \in G_f \Leftrightarrow f(2) = 0 \Leftrightarrow 2a + b = 0$.

$$\begin{cases} 5a + b = 3 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x - 2.$$

Cum A, B, C sunt coliniare, punctul C se află pe reprezentarea grafică a funcției f, deci

$f(m) = 2m + 1 \Leftrightarrow m - 2 = 2m + 1 \Leftrightarrow m = -3$.

Observăm că punctul C(-3, -5) are ambele coordonate numere întregi, deci este punct laticeal.



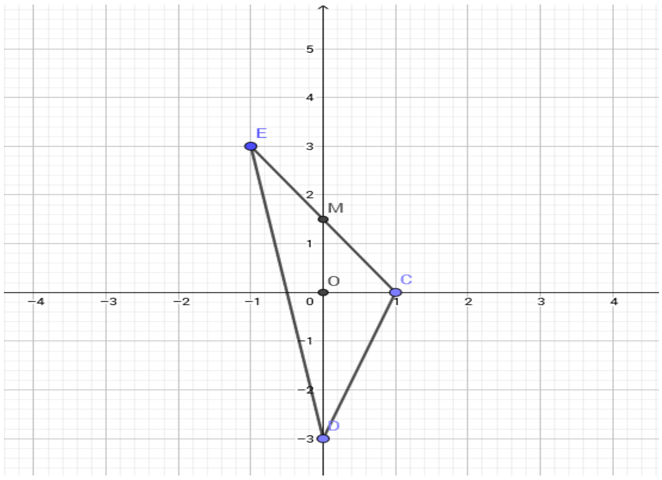
Problema 7. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-3$. [...] Fie punctele $C\left(1, f(1)\right)$ și $D\left(0, f(0)\right)$. Aflați coordonatele punctului E din plan astfel încât punctul $O\left(0,0\right)$ să fie centrul de greutate al triunghiului CDE.

(Subiect publicat pentru Testarea Națională 2007, Varianta 26, exercițiul 14)

Soluție

$C\left(1,0\right)$, $D\left(0,-3\right)$. Dacă O este centrul de greutate al triunghiului CDE, iar M mijlocul lui CE, atunci DO este mediană, O∈DM și $DO=2\cdot OM$, deci M are coordonatele $M\left(0,\frac{3}{2}\right)$. Cum M este mijlocul lui [CE], avem $x_M=\frac{x_C+x_E}{2}$, $y_M=\frac{y_C+y_E}{2}$, deci $E\left(-1,3\right)$.

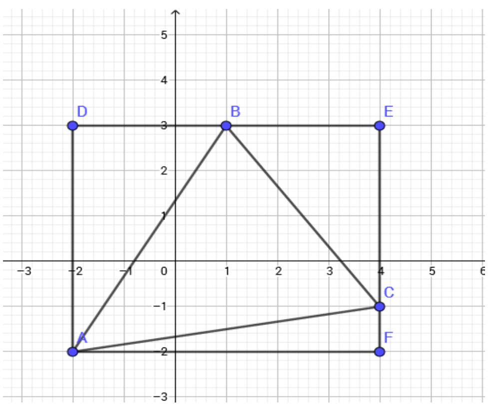
Observăm că triunghiul CDE are vârfurile și centrul de greutate noduri ale rețelei laticeale.



Problema 8. Arătați că nu există un triunghi echilateral cu vârfurile în nodurile rețelei laticeale.

(Concursul Ion Barbu- Dan Barbilian, oct 2004, clasa a IX-a)

Soluție I.



Presupunem prin absurd că există un triunghi echilateral cu vârfurile în nodurile rețelei laticeale. Construim dreptunghiul cu vârfurile în nodurile rețelei laticeale, în care se înscrie triunghiul ABC. Fără a restrânge generalitatea problemei, putem considera dreptunghiul ADEF, astfel încât B$\in$[DE], C$\in$[EF], ca în figura de mai sus.

Aria ΔABC poate fi obținută prin diferență de arii. $\left[ABC\right]=\left[ADEF\right]-\left[ADB\right]-\left[BEC\right]-\left[ACF\right]$. Coordonatele punctelor D, E și F sunt întregi, deci aria dreptunghiului este exprimată printr-un număr întreg. Aria fiecăruia dintre cele trei triunghiuri se exprimă prin formula: $Aria=\frac{catetă_1\cdot catetă_2}{2}$, iar catetele sunt numere întregi, deci fiecare dintre aceste arii se exprimă printr-un număr rațional. Rezultă că aria ΔABC se exprimă printr-un număr rațional.

Latura l a triunghiului echilateral ABC poate fi calculată cu teorema lui Pitagora dintr-un triunghi dreptunghic, de exemplu ΔABD, iar l^2 va fi un număr întreg. Atunci aria ΔABC va fi egală cu $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, care este un număr irațional. S-a obținut o contradicție. În concluzie, nu există un astfel de triunghi.

Soluție II. Presupunând că există un triunghi echilateral cu vârfurile în nodurile rețelei, folosind teorema lui Pick, vom avea aria exprimată printr-un număr rațional. Cum pătratul laturii triunghiului echilateral se obține cu teorema lui Pitagora ca o sumă de pătrate de numere întregi, l^2 este un număr întreg, iar aria lui, exprimată prin formula $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, va fi un număr irațional. Contradicție!

Problema 9. Se consideră un patrulater convex, care nu este paralelogram, cu vârfurile și punctul de intersecție al diagonalelor noduri ale rețelei laticeale. Arătați că există încă un nod al rețelei laticeale situat pe o latură sau pe o diagonală a patrulaterului.

(În legătură cu problema 3.17 din [1])

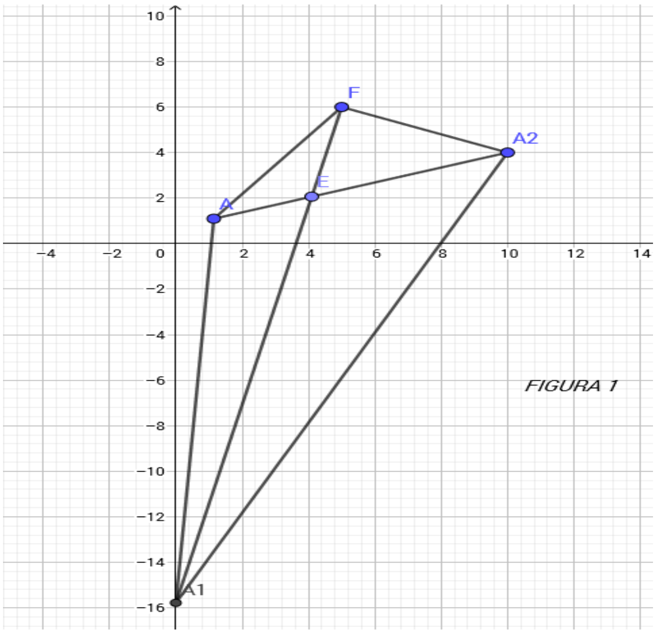
Soluție

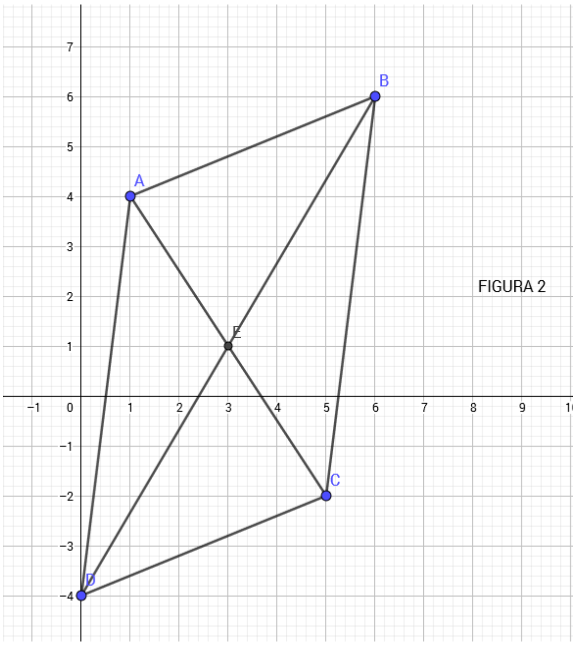
Putem nota vârfurile patrulaterului și intersecția diagonalelor cu A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Cele 5 puncte au coordonate numere întregi. Dacă notăm cu p orice număr întreg par și cu i orice număr întreg impar, orice nod al rețelei laticeale are coordonate de tipul: (p, p), (p, i), (i, p) sau (i, i). Conform principiului lui Dirichlet, două dintre cele 5 puncte au același tip de coordonate.

Fie acestea $A_1(x_1,y_1), A_2(x_2,y_2)$. Mijlocul segmentului determinat de cele două puncte are coordonatele $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$. Cum x_1+x_2 și y_1+y_2 sunt numere pare, punctul M este nod al rețelei laticeale. Datorită faptului că patrulaterul nu este paralelogram, punctul M nu coincide cu punctul de intersecție al diagonalelor patrulaterului, deci este un nou punct laticeal care aparține unei laturi sau unei diagonale. (FIGURA 1)

Observație

În cazul în care patrulaterul este paralelogram, condiția ca vârfurile sale și intersecția diagonalelor să fie noduri ale rețelei, nu este suficientă pentru apariția a încă unui punct laticeal pe o latură sau pe o diagonală.(FIGURA 2) .





Probleme propuse

1. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2-x$. Determinați mulțimea punctelor cu coordonate întregi *C(a, b)*, cu proprietatea că $C\in G_f$ sau $C\in G_g$ și $|f(a)|=|g(a)|$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-4$. Determinați distanța de la punctul $C(0,6)$ la reprezentarea grafică a funcției f în sistemul de axe ortogonale xOy.

3. Într-un sistem de axe perpendiculare xOy, se consideră punctele $A(1,6)$, $B(15,8)$. Determinați mulțimea punctelor C situate pe axa Ox, cu abscisa număr întreg, știind că triunghiul *ABC* este dreptunghic în *C*.

Bibliografie

[1] V. Pop, V. Lupșor, Matematica pentru grupele de performanță, Exerciții și probleme, Clasa a IX -a, Ed. Dacia Educațional, Cluj-Napoca, 2014

[2] Variante de subiecte publicate de M.E.C. pentru Testarea Națională 2007, Ed. Sigma, 2007

[3] www.subiecte.edu.ro. 2018

[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Pick%27s_theorem

[5] http://www.experior.ro/Docs/Asupra_unei_teoreme_Pick/1