

MATEMATICĂ M_MATE-INFO

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați numărul complex z , pentru care $z - 2\bar{z} = -2 + 6i$.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - 3$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2 - 2mx - 6$, unde m este un număr real. Determinați numărul real m , știind că graficul funcției f intersectează axa Ox într-un punct în care și graficul funcției g intersectează axa Ox .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $2^{2x} - \sqrt{2} \cdot 2^x = 2^{x+1} - 2\sqrt{2}$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifrele numere prime distincte.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$, $B(3,2)$ și $C(4,5)$. Determinați coordonatele punctului D , știind că $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.
- 5p** 6. Determinați $x \in (0, \pi)$ pentru care $2 \sin x \sin(\pi - x) = 1$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1-a & 2a & 0 \\ -a & 1+2a & 0 \\ 0 & 0 & 1+a \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1)) = 4$.
- 5p** b) Demonstrați că $A(a) \cdot A(b) = A(a + b + ab)$, pentru orice numere reale a și b .

- 5p c) Demonstrați că, dacă a, b și c sunt numere reale pentru care $A(a) \cdot A(b) \cdot A(c) = A(0)$, atunci $(1+a)(1+b)(1+c) = 1$.

2. Pe mulțimea $M = (2, \infty)$ se definește legea de compoziție asociativă:

$$x \circ y = \frac{xy - 4}{x + y - 4}.$$

- 5p a) Arătați că $8 \circ 8 = 5$.
- 5p b) Arătați că $(x+2) \circ (y+2) > (x+y) \circ 4$, pentru orice $x, y \in M$.
- 5p c) Demonstrați că, dacă $x \in M$ și n este număr natural, $n \geq 2$, astfel încât $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de } 2^n \text{ ori } x} = 2^n - \frac{1}{2^n}$, atunci x este pătratul unui număr natural.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x^2 - 4x + 5)e^{-x}$.

- 5p a) Arătați că $f'(x) = -(x-3)^2 e^{-x}$.
- 5p b) Demonstrați că graficul funcției f intersectează orice dreaptă paralelă cu axa Ox în cel mult un punct.
- 5p c) Demonstrați că $x - 3 \leq 2e^{\frac{x-5}{2}}, \forall x \in [3, \infty)$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 \arctg x$.

- 5p a) Arătați că $\int_1^2 \frac{2 \arctg x}{f(x)} dx = 1$.
- 5p b) Determinați numul real nenul a pentru care $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{f(x)}{x} dx = \frac{\pi}{a} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- 5p c) Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f^n(x) dx = 0$.