MATEMATICĂ M_MATE-INFO

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I		
1.	$z=a+bi$, $\bar{z}=a-bi$ rezultă $a+bi-2(a-bi)=-2+6i$ obținem a = b = 2 și z = 2+2i	3p 2p
2.	Graficul funcției f intersectează axa Ox în punctul P(3,0) $P\in G_g \Rightarrow g(3)=0 \Rightarrow m=\dfrac{1}{2}$	2p 3p
3.	Notând $2^x=t$, ecuația devine: $t^2-t\sqrt{2}=2t-2\sqrt{2} \Rightarrow \left(t-\sqrt{2}\right)\left(t-2\right)=0$ obținem $t_1=\sqrt{2}, t_2=2$ și soluțiile $x_1=\dfrac{1}{2}, \quad x_2=1.$	3p 2p
4.	Cifrele numărului pot fi 2,3,5 și 7. Numărul numerelor de trei cifre diferite, cu cifrele numere prime este $A_4^3=\dfrac{4!}{(4-3)!}=24$	2p 3p
5.	Din relația data rezultă că punctual A este centru de greutate al triunghiului BCD. Din $x_A=\dfrac{x_B+x_C+x_D}{3}$ obținem -1 abscisa punctului D și din $y_A=\dfrac{y_B+y_C+y_D}{3}$ obținem ordonata egală cu -4.	2p 2p 1p
6.	Relația data poate fi scrisă $\cos 2x=0$ Deoarece $x\in\left(0,\pi\right)$ obținem $2x\in\left\{\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right\} \Rightarrow x\in\left\{\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right\}$.	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea		
1.a)	$\det\left(A(1)\right)=\begin{vmatrix}0&2&0\\-1&3&0\\0&0&2\end{vmatrix}$	3p
	$\det\left(A(1)\right)=0+0+0-0-0-\left(-4\right)=4$	2p
1.b)	$A\left(a\right)\cdot A\left(b\right)=\begin{pmatrix}1-a&2a&0\\-a&1+2a&0\\0&0&1+a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1-b&2b&0\\-b&1+2b&0\\0&0&1+b\end{pmatrix}=$ $\begin{pmatrix}(1-a)(1-b)-2ab&2b(1-a)+2a(1+2b)&0\\-a(1-b)-b(1+2a)&-2ab+(1+2a)(1+2b)&0\\0&0&(1+a)(1+b)\end{pmatrix}$	3p
	$A(a+b+ab)=\begin{pmatrix}1-(a+b+ab)&2(a+b+ab)&0\\-(a+b+ab)&1+2(a+b+ab)&0\\0&0&1+(a+b+ab)\end{pmatrix}$ $\Rightarrow A(a)\cdot A(b)=A(a+b+ab)$	2p
1.c)	Relația de la b) o putem scrie: $A(a)\cdot A(b)=A((1+a)(1+b)-1)$. Astfel $A(a)\cdot A(b)\cdot A(c)=A((1+a)(1+b)-1)\cdot A(c)=A((1+a)(1+b)(1+c)-1)$	3p
	Obținem $(1+a)(1+b)(1+c)-1=0\Rightarrow(1+a)(1+b)(1+c)=1$	2p
2.a)	$8\circ 8=\dfrac{8\cdot 8-4}{8+8-4}$	3p
	$8\circ 8=\dfrac{60}{12}=5$	2p
2.b)	Relația de demonstrate este echivalentă cu: $\dfrac{(x+2)\cdot(y+2)-4}{(x+2)+(y+2)-4}>\dfrac{(x+y)\cdot 4-4}{(x+y)+4-4}\Leftrightarrow xy+2x+2y>4x+4y-4$	3p
	$\Leftrightarrow(x+2)(y+2)>0,\forall x,y\in\left(2,\infty\right)$	2p
2.c)	$x\circ y=\dfrac{(x-2)(y-2)+2(x-2)+2(y-2)}{(x-2)+(y-2)}=2+\dfrac{1}{\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{y-2}}$	

	$\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{de\ \ 2^n\ \ ori\ \ x} = 2 + \dfrac{1}{\dfrac{1}{x-2} + \ldots + \dfrac{1}{x-2}} = 2 + \dfrac{x-2}{2^n}$	3p
	Rezolvăm ecuația și obținem $x = \left(2^n - 1\right)^2$	2p
SUBIECTUL al III-lea		
1.a)	$f'(x) = \left(x^2 - 4x + 5\right)' e^{-x} + \left(x^2 - 4x + 5\right)\left(e^{-x}\right)' = (2x-4)e^{-x} - \left(x^2 - 4x + 5\right)e^{-x}$	3p
	$= e^{-x}(-x^2 + 6x - 9) = -\left(x-3\right)^2 e^{-x}$	2p
1.b)	Avem $f'(x) \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$, deci funcția f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.	3p
	Funcția este injectivă și graficul intersectează orice paralelă la axa Ox în cel mult un punct.	2p
1.c)	$f''(x) = e^{-x}\left(x-3\right)\left(x-5\right)$, $f''(x) \le 0, \forall x \in \left[3,5\right]$și $f''(x) \ge 0, \forall x \in \left[5,\infty\right)$	3p
	$f'(5) \le f'(x), \forall x \in \left[3,\infty\right)$, finalizare	2p
2.a)	$\int_1^2 \dfrac{2arctgx}{f(x)}dx = \int_1^2 \dfrac{2arctgx}{x^2 arctgx}dx = \int_1^2 \dfrac{2}{x^2}dx$	3p
	$\int_1^2 x^{-2}dx = \left.\left(-\dfrac{2}{x}\right)\right\|_1^2 = 1$	2p
2.b)	$\int_0^{\sqrt{3}} \dfrac{f(x)}{x}dx = \int_0^{\sqrt{3}} (x \cdot arctgx)dx = \left.\left(\dfrac{x^2}{2}arctgx\right)\right\|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \dfrac{x^2+1-1}{2(x^2+1)}dx$	3p
	$= \left.\left(\dfrac{x^2}{2}arctgx - \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}arctgx\right)\right\|_0^{\sqrt{3}} = \dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, rezultă $a = \dfrac{3}{2}$	2p
2.c)	Avem $0 \le arctgx \le \dfrac{\pi}{4} \le 1, \forall x \in \left[0,1\right] \Rightarrow 0 \le \left(arctgx\right)^n \le 1, \forall x \in \left[0,1\right] \Rightarrow$ $0 \le \int_0^1 f^n\left(x\right)dx \le \int_0^1 x^{2n}dx$	3p
	$0 \le \int_0^1 f^n\left(x\right)dx \le \dfrac{1}{2n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f^n\left(x\right)dx = 0$	2p