



Examenul național de bacalaureat – simulare 23.05.2024

Proba E. c)

Matematică M_mate-info

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore

SUBIECTUL I – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că modulul numărului complex $z = \frac{5-12i}{12+5i}$ este egal cu 1.
- 5p 2. Se consideră funcția bijectivă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 5 - 3x$. Determinați valoarea numărului real a pentru care $f^{-1}(a) = f(a)$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{x-1} = 1-x$.
- 5p 4. Se consider mulțimea $M = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Determinați numărul submulțimilor lui M , cu patru elemente din care exact trei sunt numere impare.
- 5p 5. Demonstrați că vectorii $\vec{u} = (a+1)\vec{i} + (a-2)\vec{j}$ și $\vec{v} = (a+2)\vec{i} + (a-1)\vec{j}$ nu sunt coliniari indiferent de valoarea reală a lui a .
- 5p 6. Determinați $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\cos x(1 + \tan^2 x) = \sin x(1 + \cot^2 x)$.

SUBIECTUL al II-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $M(a) = \begin{pmatrix} 1+2a & 2a & 0 \\ -a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1+a \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$.
- 5p a) Arătați că $\det(M(1)) = 4$.
- 5p b) Arătați că $M(a) \cdot M(b) = M(a+b+ab), \forall a, b \in \mathbb{R}$.
- 5p c) Determinați matricea $X \in M_3(\mathbb{R})$ pentru care $M(0) \cdot M(1) \cdot \dots \cdot M(2024) \cdot X = M(2024! - 1)$.
2. Se consideră polinomul $f = X^4 - (m+1)X^3 + 6X^2 - (m+1)X + 1 \in \mathbb{R}[X]$.
- 5p a) Pentru $m=3$ arătați că polinomul f este divizibil cu $(X-1)^2$.
- 5p b) Pentru $m=2$ arătați că polinomul f nu are toate rădăcinile reale.
- 5p c) Pentru $m=4$ descompuneți polinomul f în produs de polinoame ireductibile peste $\mathbb{R}[X]$.

SUBIECTUL al III-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2} - x$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{x - \sqrt{x^2 - 2x + 2} - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei oblice la $-\infty$.
- 5p c) Arătați că ecuația $f(x) = a$ are soluție unică oricare ar fi $a \in (-1, \infty)$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x}$.

5p a) Arătați că $\int_0^1 f(x) \cdot f(-x) dx \in \mathbb{Q}$.

5p b) Determinați aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele $x = -1$, $x = 1$.

5p c) Determinați valoarea numărului real $a \in (0, \infty)$ pentru care $\int_{1/a}^a f(\ln x) dx = \frac{8}{3}$.

Examenul național de bacalaureat – simulare 23.05.2024
Proba E. c)
Matematică M_mate-info
BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I
(30 de puncte)

1.	$ z = \frac{ 5-12i }{ 12+5i } = \frac{ 5-12i }{\sqrt{12^2+5^2}} = \frac{\sqrt{5^2+(-12)^2}}{\sqrt{12^2+5^2}} =$	3p
	finalizare	2p
2.	Ecuția dată este echivalentă cu $f(f(a)) = a \Leftrightarrow 5 - 3(5 - 3x) = a$	3p
	finalizare	2p
3.	Ecuția devine $x - 1 = (1 - x)^3 \Leftrightarrow (1 - x)(1 + (1 - x)^2) = 0$	3p
	Soluție $x = 1$	2p
4.	Numărul submulțimilor cu trei elemente numere impare este $C_5^3 = 10$	2p
	Numărul submulțimilor cu patru elemente din care exact trei sunt impare este $C_5^1 \cdot C_5^3 = 50$	3p
5.	Vectorii sunt coliniari dacă $\frac{a+1}{a-2} = \frac{a-2}{a-1}$	3p
	finalizare	2p
6.	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ și $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$. Înlocuind obținem $\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sin x}$	3p
	Soluție $x = \frac{\pi}{4}$	2p

SUBIECTUL al II-lea
(30 de puncte)

1.	a) $\det(M(1)) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - (-4)$	3p
	$= 4$	2p
	b) $\begin{pmatrix} 1+2a & 2a & 0 \\ -a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1+a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+2b & 2b & 0 \\ -b & 1-b & 0 \\ 0 & 0 & 1+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+2a)(1+2b) - 2ab & 2b(1+2a) + 2a(1-b) & 0 \\ -a(1+2b) - b(1-a) & -2ab + (1-a)(1-b) & 0 \\ 0 & 0 & (1+a)(1+b) \end{pmatrix}$	3p
	finalizare	2p
	c) $M(a) \cdot M(b) = M((a+1)(b+1)-1) \Rightarrow M(0) \cdot M(1) \cdot \dots \cdot M(2024) = M(2025!-1)$	2p

Probă scrisă la matematică M_mate-info

Barem de evaluare și notare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

	$M^{-1}(a)=M\left(\frac{1}{a+1}-1\right), \forall a \neq -1$	2p
	$X=M\left(\frac{1}{2025!}-1\right)M\left(2024!-1\right)=M\left(-\frac{2024}{2025}\right)$	1p
2.	X^4 X^3 X^2 X X^0 1 -4 6 -4 1 1 1 -3 3 -1 0 1 1 -2 1 0 a) $(X-1)^2 f \Leftrightarrow f=(X-1)^2 \cdot g$ $g=X^2-2X+1$ b) $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=3^2-2 \cdot 6=-3$ finalizare c) Rezolvând ecuația reciprocă obținem soluțiile: $x_1=2+\sqrt{3} \in \mathbb{R}, \quad x_2=2-\sqrt{3} \in \mathbb{R}, \quad x_3=\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}-\mathbb{R}, \quad x_4=\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}-\mathbb{R}$ $f=(X-2-\sqrt{3})(X-2+\sqrt{3})(X^2-X+1)$	3p 2p 3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.	a) $f'(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+2}} - 1$ Obținerea rezultatului	3p
	b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \left(\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1 \right)}{x} = -2 \in \mathbb{R}^* \Rightarrow m = -2$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x+2}{\sqrt{x^2-2x+2}-x} = 1 \in \mathbb{R} \Rightarrow n = 1$ $y = -2x + 1$ asimptotă oblică	2p
	c) $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ strict descrescătoare pe $\mathbb{R} \Rightarrow$ ecuația $f(x) = a$ are cel mult o soluție $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$ ecuația $f(x) = a$ are soluție unică oricare ar fi $a \in (-1, \infty)$	2p
		3p
2.	a) $\int_0^1 (x^2 + x + 1)e^{-x}(x^2 - x + 1)e^x dx = \int_0^1 (x^4 + x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x \right) \Big _0^1 =$ finalizare	3p
	b) $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 (x^2 + x + 1)e^{-x} dx = -\left(x^2 + x + 1 \right)e^{-x} \Big _{-1}^1 + \int_{-1}^1 (2x + 1)e^{-x} dx =$ finalizare	2p
	c) $\int_{1/a}^a (\ln^2 x + \ln x + 1)e^{-\ln x} dx = \int_{1/a}^a (\ln^2 x + \ln x + 1) \frac{1}{x} dx = \left(\frac{\ln^3 x}{3} + \frac{\ln^2 x}{2} + \ln x \right) \Big _{1/a}^a$ Rezolvarea ecuației cu necunoscuta a, obținerea soluției $a = e$	3p
		2p