Examenul național de bacalaureat – simulare 19.12.2023
Proba E. c)
Matematică M_mate-info

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore**

SUBIECTUL I – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

5p **1.** Fie $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică cu termeni pozitivi. Știind că $b_3 = 2\sqrt{3}$ și $b_5 = 6$. Arătați că b_1 este număr rational.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-x^2$. Arătați că dreapta $d: x-y+1=0$ este tangentă la graficul funcției f.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3\cdot 4^{x^2}+4\cdot 2^{4x}=16^{x+1}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să **nu** fie divizibil cu 15.

5p **5.** Se consideră punctele $A(-1,-3)$, $B(7,1)$ și $M(x,y)$ unde $x,y\in\mathbb{R}$. Determinați numerele reale x,y pentru care $3\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$.

5p **6.** Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\sin x\cdot\sin(\pi-x)+\cos x\cdot\cos(\pi-x)=\cos 2x$.

SUBIECTUL al II-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=2$.

5p **b)** Arătați că $\forall a\in\mathbb{R}$ **nu** există $x,y\in\mathbb{R}$ pentru care $A^2(a)+xA(a)+yI_3=O_3$.

5p **c)** Determinați cel mai mic număr natural nenul n pentru care există $m\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $A^n\left(\sqrt{2}\right)=2^m\cdot I_3$.

2. Pe mulțimea $M=\left[e^2,\infty\right)$ se definește aplicația $x\circ y=(\ln x-2)(\ln y-2)+a$, $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $a=e^2$ arătați că $2023\circ e^2=e^2$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care $x\circ y\in M, \forall x,y\in M$.

5p **c)** Pentru $a=e^2$ determinați perechile ordonate (m,n) de numere naturale nenule pentru care $x\circ y+(ex)\circ\left(\frac{y}{e}\right)=2e^2+12$, unde $x=e^m$ și $y=e^{n+1}$.

SUBIECTUL al III-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(3,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2x-5}{x^2-5x+6}$.

5p **a)** Arătați că $4f'(4)+5=0$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei spre ∞ pentru funcția $g:(3,\infty)\to\mathbb{R},\ g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

5p **c)** Demonstrați că $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}<0$, $\forall a,b\in(3,\infty), a\neq b$.

2. Se consideră funcțiile $f,G:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ și $G(x)=ax^2+2023, a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Determinați valoarea reală a lui a pentru care funcția G este o primitivă a lui g pe $\mathbb{R}$, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)-f(-x), \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că orice primitivă a lui f este strict monotonă pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinați o primitivă H a funcției $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x)=\ln(f(x))$ cu proprietatea $H(0)=2023$.

Examenul național de bacalaureat – simulare 19.12.2023
Proba E. c)
Matematică M_mate-info
BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_1 \cdot b_5 = b_3^2 \Rightarrow b_1 = \frac{b_3^2}{b_5}$	**3p**
	$b_1 = 2 \in \mathbb{Q}$	**2p**
2.	Sistemul $\begin{cases} y = f(x) \\ y = x+1 \end{cases}$ are o soluție	**3p**
	Punctul comun este P(1,2)	**2p**
3.	Ecuația devine $3 \cdot 4^{x^2} = 4^{2x+2} - 4^{2x+1} \Leftrightarrow 3 \cdot 4^{x^2} = 3 \cdot 4^{2x+1}$	**3p**
	Soluții $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$	**2p**
4.	Numărul cazurilor posibile = 90	**2p**
	Numărul cazurilor favorabile 90 – 6 = 84	**2p**
	$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{84}{90} = \frac{14}{15}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{AM} = (x+1)\vec{i} + (y+3)\vec{j}$, $\overrightarrow{BM} = (x-7)\vec{i} + (y-1)\vec{j}$	**3p**
	x=1, y=-2	**2p**
6.	Ecuația devine $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos 2x \Leftrightarrow tg^2 x = 1$	**3p**
	$x = \frac{\pi}{4}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $\det\left(A(1)\right) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - (-1)$	**3p**
	$= 2$	**2p**

	b) $A^2(a)=\begin{pmatrix}0&-2&0\\2&0&0\\0&0&a^2\end{pmatrix}\Rightarrow$	**1p**
	$\begin{pmatrix}0&-2&0\\2&0&0\\0&0&a^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x&-x&0\\x&x&0\\0&0&ax\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y&0&0\\0&y&0\\0&0&y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	**2p**
	finalizare	**2p**
	c) $A=\sqrt{2}\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4}&-\sin\frac{\pi}{4}&0\\\sin\frac{\pi}{4}&\cos\frac{\pi}{4}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow A^n=\sqrt{2}^n\begin{pmatrix}\cos\frac{n\pi}{4}&-\sin\frac{n\pi}{4}&0\\\sin\frac{n\pi}{4}&\cos\frac{n\pi}{4}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	**3p**
	Soluție $n=8,m=4$	**2p**
2.	**a)** $2023\circ e^2=(\ln 2023-2)\left(\ln e^2-2\right)+e^2$	**3p**
	finalizare	**2p**
	b) $x\geq e^2\Rightarrow \ln x\geq 2\Rightarrow \ln x-2\geq 0$	**2p**
	Finalizare	**3p**
	c) $e^m\circ e^{n+1}+e^{m+1}\circ e^n=2e^2+12\Rightarrow (m-2)(n-1)+(m-1)(n-2)=12$	**3p**
	Obținem soluțiile (2,14), (14,2) și (4,4)	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $f'(x)=\dfrac{-2x^2+10x-13}{\left(x^2-5x+6\right)^2}$	**3p**
	Obținerea rezultatului	**2p**
	b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)=\dfrac{1}{2}\in\mathbb{R}^*$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-\dfrac{x}{2}\right)=-\dfrac{5}{4}\in\mathbb{R}$	**3p**
	$2x-4y-5=0$ ecuația asimptotei oblice	**2p**
	c) $f'(x)<0,\forall x\in(3,\infty)\Rightarrow f$ strict descrescătoare pe $(3,\infty)$	**3p**
	Finalizare	**2p**
2.	**a)** G continuă și derivabilă, $G'(x)=g(x)\Rightarrow 2ax=x+\sqrt{x^2+1}-\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right)$	**3p**
	finalizare	**2p**
	b) F primitivă oarecare $F'(x)=f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$	**3p**
	finalizare	**2p**
	c) $\int\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\int\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\sqrt{x^2+1}+C$	**3p**
	Determinarea primitivei	**2p**