

# SIMULAREA EXAMENULUI NAȚIONAL DE BACALAUREAT

Proba E. c)

Matematică M\_mate-info

clasa a XI-a

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore

## SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați numărul real  $x$  pentru care numerele  $2x-5, x+2, 3x$  sunt în progresie aritmetică.
- 5p 2. Se consideră funcțiile  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = a - x$  și  $g(x) = x + 4$ . Determinați numerele reale  $a$  și  $b$  pentru care  $A(-1, b)$  este punctul de intersecție a graficelor celor două funcții.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația:  $16 \cdot \frac{1}{8^x} \geq 2^{x^2}$ .
- 5p 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr  $n$  din mulțimea  $\{1, 2, 3, 4, \dots, 100\}$  să avem  $\log_3 n \in \mathbb{N}^*$ .
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(3, 4)$ ,  $B(4, -3)$  și  $C(7, 1)$ . Arătați că distanța de la A la BC este egală cu distanța de la B pe AC.
- 5p 6. Arătați că triunghiul ascuțitunghic ABC pentru care  $\sin B \cdot \cos B = \sin C \cdot \cos C$  este isoscel.

## SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea  $A(m) = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 2 & m+1 & 1 \\ 1 & 1 & m+1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$  și sistemul de ecuații
- $$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ 2x + (m+1)y + z = 2 \\ x + y + (m+1)z = m+1 \end{cases}$$
- 5p a) Arătați că  $\det(A(0)) = 0$ .
- 5p b) Demonstrați că sistemul **nu** are soluții pentru  $m = -3$ .
- 5p c) Demonstrați că pentru orice număr real  $m$  sistemul de ecuații are cel mult o soluție.
2. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & a-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ a-1 & 0 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$ .
- 5p a) Arătați că  $A(-2) + A(2) = 2 \cdot A(0)$ .
- 5p b) Arătați că  $A(a) \cdot A(b) = A(2ab - a - b + 1)$  pentru orice  $a, b \in \mathbb{R}$ .

5p c) Determinați numărul natural  $n$  pentru care

$$A\left(\frac{1}{2}\right) \cdot A\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot A\left(\frac{5}{2}\right) \cdot \dots \cdot A\left(-\frac{2023}{2}\right) \cdot A\left(\frac{2025}{2}\right) = A\left(\frac{n}{2}\right).$$

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} - \{\pm 1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$ .
- 5p b) Determinați ecuațiile tangentelor la graficul funcției paralele cu dreapta  $x + y = 0$ .
- 5p c) Calculați  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x \cdot f(x)} \right)^{x^2}$ .
2. Se consideră funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x - \frac{ax}{x+1}$ .
- 5p a) Determinați numărul real  $a$  pentru care  $f'(1) = \frac{3}{4}$ .
- 5p b) Pentru  $a = 1$  arătați că  $f'(x) > 0, \forall x \in (0, \infty)$ .
- 5p c) Pentru  $a = 1$  arătați că ecuația  $f(x) = m$  are soluție unică pentru orice număr real  $m$ .

# SIMULAREA EXAMENULUI NAȚIONAL DE BACALAUREAT

Proba E. c)

Matematică M\_mate-info

clasa a XI-a

## BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

### SUBIECTUL I

(30 de puncte)

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                            |                |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| 1. | $2(x+2) = (2x-5) + 3x \Rightarrow 2x+4 = 5x-5$<br>$3x=9 \Rightarrow x=3$                                                                                                                                                                                                   | 3p<br>2p       |
| 2. | $f(-1)=b$ și $g(-1)=b$<br>$b=3$ și $a=2$                                                                                                                                                                                                                                   | 2p<br>3p       |
| 3. | Inecuația devine $2^4 \cdot 2^{-3x} \geq 2^{x^2} \Rightarrow 2^{4-3x} \geq 2^{x^2} \Rightarrow x^2 + 3x - 4 \leq 0$<br>Soluție $x \in [-4, 1]$                                                                                                                             | 3p<br>2p       |
| 4. | $\log_3 n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow n = 3^k, k \in \mathbb{N}^*$ Deci numărul cazurilor favorabile este 4 (3, 9, 27, 81)<br>Numărul cazurilor posibile este 100<br>$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$ | 3p<br>1p<br>1p |
| 5. | $AC = \sqrt{(7-3)^2 + (1-4)^2} = 5$ și $BC = \sqrt{(7-4)^2 + (1+3)^2} = 5$<br>Obținem $AC = BC \Rightarrow \triangle ABC$ este isoscel $\Rightarrow d(B, AC) = d(A, BC)$                                                                                                   | 2p<br>3p       |
| 6. | $\sin B \cdot \cos B = \sin C \cdot \cos C \Rightarrow \sin(2B) = \sin(2C) \Rightarrow \sin(B-C) \cdot \cos(B+C) = 0$<br>triunghiul este ascuțitunghic deci $\cos(B+C) \neq 0$<br>Obținem $\sin(B-C) = 0 \Rightarrow B = C$                                                | 3p<br>2p       |

### SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

|    |                                                                                                                                                                                                                                           |          |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| 1. | $\mathbf{a)} \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 1 - 1 - 2 - 0$<br>$= 0$                                                                                                             | 3p<br>2p |
|    | $\mathbf{b)} \det(A(-3)) = 0$ și $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A(-3)) = 2$<br>$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$ deci sistemul nu are soluții | 3p<br>2p |

Probă scrisă la matematică M\_mate-info

Barem de evaluare și notare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                     |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
|    | <p>c) <math>\det(A(m)) = (m+3) \cdot \begin{vmatrix} 1 &amp; 1 &amp; 1 \\ 2 &amp; m+1 &amp; 1 \\ 1 &amp; 1 &amp; m+1 \end{vmatrix} = (m+3) \cdot \begin{vmatrix} 1 &amp; 0 &amp; 0 \\ 2 &amp; m-1 &amp; -1 \\ 1 &amp; 0 &amp; m \end{vmatrix} = m(m+3)(m-1)</math></p> <p>pentru <math>m \in \mathbb{R} - \{0, 1, -3\}</math> sistemul are soluție unică.</p> <p>Pentru <math>m \in \{0, 1, -3\}</math> sistemul nu are soluții</p> | <p>3p</p> <p>2p</p> |
| 2. | <p>a) <math>A(-2) + A(2) = \begin{pmatrix} -2 &amp; 0 &amp; -3 \\ 0 &amp; 1 &amp; 0 \\ -3 &amp; 0 &amp; -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 &amp; 0 &amp; 1 \\ 0 &amp; 1 &amp; 0 \\ 1 &amp; 0 &amp; 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 &amp; 0 &amp; -2 \\ 0 &amp; 2 &amp; 0 \\ -2 &amp; 0 &amp; 0 \end{pmatrix}</math></p> <p>finalizare</p>                                                                                     | <p>3p</p> <p>2p</p> |
|    | <p>b) <math>\begin{pmatrix} a &amp; 0 &amp; a-1 \\ 0 &amp; 1 &amp; 0 \\ a-1 &amp; 0 &amp; a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b &amp; 0 &amp; b-1 \\ 0 &amp; 1 &amp; 0 \\ b-1 &amp; 0 &amp; b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab + (a-1)(b-1) &amp; 0 &amp; a(b-1) + b(a-1) \\ 0 &amp; 1 &amp; 0 \\ b(a-1) + a(b-1) &amp; 0 &amp; (a-1)(b-1) + ab \end{pmatrix}</math></p> <p>finalizare</p>                                      | <p>3p</p> <p>2p</p> |
|    | <p>c) <math>A\left(\frac{1}{2}\right) \cdot A(a) = A\left(\frac{1}{2}\right), \forall a \in \mathbb{R}.</math></p> <p>Obținem <math>A\left(\frac{1}{2}\right) \cdot A\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot A\left(\frac{5}{2}\right) \cdot \dots \cdot A\left(-\frac{2023}{2}\right) \cdot A\left(\frac{2025}{2}\right) = A\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow n = 1</math></p>                                                          | <p>2p</p> <p>3p</p> |

**SUBIECTUL al III-lea**
**(30 de puncte)**

|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                     |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|
| 1. | <p>a) <math>f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 - 1) - x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2}</math></p> <p>Obținerea rezultatului</p>                                                                                                                                                                                                                                                  | <p>3p</p> <p>2p</p> |
|    | <p>b) <math>m = -1 \Rightarrow</math> rezolvăm ecuația <math>f'(x) = -1</math> și obținem soluțiile <math>x_1 = 0, x_2 = \sqrt{3}, x_3 = -\sqrt{3}</math></p> <p>Scrierea ecuațiilor tangentelor</p>                                                                                                                                                                                                  | <p>3p</p> <p>2p</p> |
|    | <p>c) <math>\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x \cdot f(x)} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{x^2 - 1} \right)^{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x^2 - 1} \right)^{\frac{x^2}{2}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2}{2} \right)} =</math></p> <p>Obținerea rezultatului</p>                | <p>3p</p> <p>3p</p> |
| 2. | <p>a) <math>f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{a \cdot (x+1) - ax \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{a}{(x+1)^2}</math></p> <p><math>f'(1) = \frac{3}{4} \Rightarrow a = 1</math></p>                                                                                                                                                                                                                   | <p>3p</p> <p>2p</p> |
|    | <p>b) <math>f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + x + 1}{x(x+1)^2}</math></p> <p>finalizare</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                       | <p>3p</p> <p>2p</p> |
|    | <p>c) funcția este continuă</p> <p><math>f'(x) &gt; 0, \forall x \in (0, \infty) \Rightarrow f</math> este strict crescătoare <math>\Rightarrow</math> ecuația <math>f(x) = m</math> are cel mult o soluție</p> <p><math>\lim_{x \searrow 0} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \text{Im } f = \mathbb{R} \Rightarrow</math> ecuația are cel puțin o soluție</p> | <p>3p</p> <p>2p</p> |