



Examenul național de bacalaureat 2023 – simulare județeană

Proba E. c)

Matematică M_mate-info

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore

SUBIECTUL I – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $\alpha^{2023} = \alpha$, unde α este soluție a ecuației $z^2 + z + 1 = 0$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 5x + 5$. Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care dreapta de ecuație $y = mx + 1$ intersectează graficul funcției în două puncte.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(4-x) - \log_{\sqrt{2}}\sqrt{x-2} = 2$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca alegând o funcție din mulțimea funcțiilor $f: \{0,1,2\} \rightarrow \{0,1,2,3\}$, aceasta să fie strict monotonă.
- 5p 5. Se consideră vectorii $\vec{u} = (a+1)\vec{i} - \vec{j}$ și $\vec{v} = -a\vec{i} + \vec{j}$, unde a este un număr real. Arătați că unghiul format de cei doi vectori este obtuz oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.
- 5p 6. Se consideră triunghiul ABC în care $BC \cdot \sin C = AC \cdot \sin B$. Arătați că laturile triunghiului formează o progresie geometrică.

SUBIECTUL al II-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ac & ab \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax + by + cz = a \\ a^2x + b^2y + c^2z = a^2 \\ bcx + acy + abz = bc \end{cases}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- 5p a) Arătați că $\det(A(6, -2, 3)) = 0$.
- 5p b) Arătați că sistemul este compatibil determinat $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ și $a \neq b \neq c \neq a$.
- 5p c) Pentru $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq b \neq c$ arătați că sistemul admite o infinitate de soluții (x_0, y_0, z_0) pentru care $x_0 + y_0 + z_0 \in \mathbb{N}$.
2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 3(x+y) - xy - 6$.
- 5p a) Arătați că $2023 \circ 3 = 3$.
- 5p b) Arătați că există un număr finit de elemente simetrizabile în raport cu legea de compoziție.
- 5p c) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația: $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{x \text{ de } 2023 \text{ ori}} = 2$.

SUBIECTUL al III-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x+2} e^x$.

- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x^2 + 3x + 3)e^x}{(x+2)^2}$ oricare ar fi $x \in (-2, \infty)$.
- 5p** b) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{-x} \sqrt{f(2x)} \right)^x$.
- 5p** c) Demonstrați că funcția f este inversabilă și arătați că $f'(0) \cdot \left(f^{-1} \right)' \left(\frac{1}{2} \right) = 1$.
2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x^3 + x$ și $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \ln x$.
- 5p** a) Arătați că $\int_{-1}^1 (f(-x) + 2f(x)) dx = 0$.
- 5p** b) Fie $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = f(x)e^{x^2}$. Arătați că orice primitivă a lui h este convexă pe $\mathbb{R}$.
- 5p** c) Determinați o primitivă G a funcției g cu proprietatea $G(1) = 0$.

Examenul național de bacalaureat 2023 – simulare județeană
Proba E. c)
Matematică M_mate-info
BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

Filia teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filia vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I
(30 de puncte)

1.	Deoarece α este soluție a ecuației $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ obținem $\alpha^3 = 1$. rezultă $\alpha^{2023} = (\alpha^3)^{674} \cdot \alpha = \alpha$	3p 2p
2.	Dreapta intersectează graficul funcției în două puncte dacă ecuația $x^2 - (5+m)x - 1 = 0$ are două soluții, deci $\Delta > 0$ $\Delta = (m+1)(m+9)$ și $m \in (-\infty, -9) \cup (-1, \infty)$	3p 2p
3.	Ecuația devine $\log_2(4-x) - \log_2(x-2) = 2 \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{4-x}{x-2}\right) = 2$ $x = \frac{12}{5}$ este soluție.	3p 2p
4.	Numărul cazurilor posibile = numărul funcțiilor $f: \{0,1,2\} \rightarrow \{0,1,2,3\}$ este 4^3 Numărul funcțiilor strict monotone este $2 \cdot C_4^3 = 2 \cdot \frac{4!}{3!(4-3)!} = 8$. $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{8}{4^3} = \frac{1}{8}$	2p 2p 1p
5.	$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{ \vec{u} \cdot \vec{v} } = \frac{(a+1) \cdot (-a) + (-1) \cdot 1}{\sqrt{(a+1)^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{a^2 + 1^2}} = \frac{-a^2 - a - 1}{\sqrt{a^2 + 2a + 2} \sqrt{a^2 + 1}}$ $= -\frac{a^2 + a + 1}{\sqrt{a^2 + 2a + 2} \sqrt{a^2 + 1}} < 0 \Rightarrow$ unghi obtuz	3p 2p
6.	$BC \cdot \sin C = AC \cdot \sin B \Rightarrow BC \cdot \frac{AB}{2R} = AC \cdot \frac{AC}{2R}$ $BC \cdot AB = AC^2$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea
(30 de puncte)

1.	a) $\det(A(6, -2, 3)) = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 36 & 4 & 9 \\ -6 & 18 & -12 \end{vmatrix} = 6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ -1 & 9 & -4 \end{vmatrix} =$ $= 36 \cdot 0 = 0$	2p 3p
----	---	----------

Probă scrisă la matematică M_mate-info

Barem de evaluare și notare

Filia teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filia vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

	b) $\det(A(a,b,c)) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \\ bc & ac-bc & ab-ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a \\ bc & -c & -b \end{vmatrix} =$ $= (b-a)(c-a) \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ a^2 & b+a & c-b \\ bc & -c & c-b \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)(ab+bc+ac) \neq 0$	2p
	Sistemul este compatibil determinat.	1p
	c) Rangul matricei sistemului este egal cu rangul matricei extinse = 2. Sistemul este compatibil nedeterminat.	3p
	Soluția sistemului este $(1, -\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}$. Obținem $x_0 + y_0 + z_0 = 1 + (-\alpha) + \alpha = 1 \in \mathbb{N}$	2p
2.	a) $2023 \circ 3 = 3(2023+3) - 2023 \cdot 3 - 6 =$ finalizare	3p 2p
	b) Determinarea elementului neutru $e = 2$ Determinarea elementelor simetrizabile $x' = 3 - \frac{1}{3-x} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x' \in \{2, 4\}$	2p 3p
	$\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{x-de2023ori} = 3 + (-1)^{2023-1} (x-3)^{2023}$ c)	3p
	Obținem ecuația $3 + (x-3)^{2023} = 2 \Rightarrow (x-3)^{2023} = -1 \Rightarrow x = 2$	2p

SUBIECTUL al III-lea
(30 de puncte)

1.	a) $f'(x) = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)' e^x + \frac{x+1}{x+2} (e^x)' = \frac{1+(x+1)(x+2)}{(x+2)^2} e^x =$	3p
	Obținerea rezultatului	2p
	b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^x \sqrt{\frac{2x+1}{2x+2}} e^{2x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{2x+1}{2x+2}} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{2x+2} \right)^{\frac{x}{2}} =$ $= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x}{4x+4} \right)} = e^{-\frac{1}{4}}$	3p 2p
	c) $f'(x) > 0, \forall x \in (-2, \infty) \Rightarrow f$ strict crescătoare pe $(-2, \infty) \Rightarrow f$ injectivă Imaginea funcției este mulțimea numerelor reale, deci funcția este surjectivă. Funcția este inversabilă și $(f^{-1})' \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{f'(0)}$	3p 2p
2.	a) funcția este impară finalizare	3p 2p
	b) $H'(x) = f(x)e^{x^2}$ și $H''(x) = e^{x^2} (8x^4 + 14x^2 + 1)$ finalizare	3p 2p
	c) $\int g(x) dx = -\frac{2 \ln x}{x^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{\ln^2 x}{2} + C$	3p
	Determinarea primitivei	2p