



Examenul național de bacalaureat 2023 – simulare județeană

Proba E. c)

Matematică M_șt-nat

Filiera teoretică: profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați numărul real x pentru care $\log_x 2023$, $\left[\sqrt{3} + \sqrt{2}\right]$ și $\sqrt[3]{125}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice (unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x).
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 5x + 5$. Determinați numărul real m pentru care dreapta $y = mx + 1$ intersectează graficul funcției într-un punct cu ordonata -1.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $\log_2(4-x) = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{x-2}$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca alegând o funcție din mulțimea funcțiilor $f: \{0,1\} \rightarrow \{0,1,2\}$, să avem $f(0) \cdot f(1) = 0$.
- 5p 5. Se consideră vectorii $\vec{u} = (a+1)\vec{i} - \vec{j}$ și $\vec{v} = -a\vec{i} + \vec{j}$, $a \in \mathbb{R}$. Arătați că vectorii **nu** sunt coliniari indiferent de valoarea numărului real a .
- 5p 6. Arătați că triunghiul ABC în care $\frac{a}{\sin B} = \frac{b}{\sin C} = \frac{c}{\sin A}$ este echilateral.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(a) = I_3 + aA$ pentru orice număr real a .
- 5p a) Arătați că $\det A = 0$.
- 5p b) Arătați că $M(a) \cdot M(b) = M(a+b+2ab)$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.
- 5p c) Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea $M(a)$ este inversabilă și calculați $M^{-1}(-1)$.
2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 3 - (x-3)(y-3)$.
- 5p a) Arătați că $2 \circ 2023 = 2023$.
- 5p b) Determinați numerele elementele simetrizabile care sunt egale cu simetricele lor în raport cu legea de compoziție.
- 5p c) Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația $x \circ x \circ x = x$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$.

- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x+1)e^x}{(x+2)^2}$.
- 5p b) Determinați intervalele de convexitate ale funcției f .
- 5p c) Determinați numerele reale a și b pentru care dreapta $d: x + ay + b = 0$ este tangentă la graficul funcției în punctul de abscisă zero.
2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4x^3 + x$ și $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x) \ln x$
- 5p a) Arătați că $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$.
- b) Determinați o primitivă G a lui g cu proprietatea $G(1) = 0$.
- 5p c) Arătați că $\int_0^a f(x) dx < \int_0^b f(x) dx \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ cu } 0 < a < b$.

Examenul național de bacalaureat 2023 – simulare județeană

Proba E. c)

Matematică M_șt-nat

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

Filiera teoretică: profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\log_x 2023 + \sqrt[3]{125} = 2[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$, $[\sqrt{2} + \sqrt{3}] = 3$ $\sqrt[3]{125} = 5 \Rightarrow \log_x 2023 = 1 \Rightarrow x = 2023$	3p 2p
2.	$f(x) = -1 \Rightarrow x_1 = 2$ și $x_2 = 3$ $A(2, f(2)) \in d \Rightarrow m = -1$ și $A(3, f(3)) \in d \Rightarrow m = -\frac{2}{3}$	3p 2p
3.	Ecuția devine $\log_2(4-x) - \log_2(x-2) = 0 \Leftrightarrow \log_2(4-x) = \log_2(x-2)$ $x = 3$ este soluție.	3p 2p
4.	Numărul cazurilor posibile = numărul funcțiilor $f: \{0,1\} \rightarrow \{0,1,2\}$ este $3^2 = 9$ Nr funcțiilor cu proprietatea $f(0) \cdot f(1) \neq 0$ este 4, deci numărul cazurilor favorabile este 5 $P = \frac{5}{9}$	2p 2p 1p
5.	Dacă $\vec{u}, \vec{v}$ coliniari atunci $\exists \alpha \in \mathbb{R}^* a. \vec{u} = \alpha \vec{v} \Rightarrow \frac{a+1}{-a} = \frac{-1}{1} \Rightarrow$ Obținem $a+1 = a$, contradicție	3p 2p
6.	Înlocuim în relația dată $\sin A = \frac{a}{2R}$ și obținem $\frac{a}{\frac{b}{2R}} = \frac{b}{\frac{c}{2R}} = \frac{c}{\frac{a}{2R}} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = k$ Obținem $k = 1$, deci triunghiul este echilateral	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	a) $\det A = \begin{vmatrix} 6 & 8 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -48 + 0 + 0 - 0 - 0 - (-48)$ finalizare	3p 2p
	b) $A \cdot A = 2A$ $M(a) \cdot M(b) = (I_3 + aA)(I_3 + bA) = I_3 + aA + bA + abA^2 = M(a + b + 2ab)$	2p 3p
	c) Matricea este inversabilă dacă determinantul este nenul, deci $(2a+1)^2 \neq 0 \Rightarrow a \neq \frac{-1}{2}$ Obținem $M^{-1}(-1) = \frac{1}{\det(M(-1))} \cdot M^* = M(-1)$.	2p 3p
2.	a) $2 \circ 2023 = 3 - (2-3)(2023-3) =$ finalizare	3p 2p

	b. Determinarea elementului neutru $e = 2$	2p
	Determinarea elementelor simetrizabile $x' = 3 - \frac{1}{3-x} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x' \in \{2, 4\}$	3p
	c) $x \circ x = 3 - (x-3)^2$, $x \circ x \circ x = 3 + (x-3)^3$	3p
	Ecuția devine $3 + (x-3)^3 = x \Rightarrow (x-3)(x-4)(x-2) = 0 \Rightarrow x \in \{2, 3, 4\}$	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.	a) $f'(x) = \frac{e^x \cdot (x+2) - e^x}{(x+2)^2} =$	3p
	finalizare	2p
	b) $f''(x) = \left(\frac{x+1}{(x+2)^2} \right)' \cdot e^x + \frac{x+1}{(x+2)^2} \cdot e^x = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x+2)^3} \cdot e^x$	3p
	finalizare	2p
	c) $A(0, f(0)) \in d \Rightarrow a + 2b = 0$	2p
	$f'(0) = m_d \Rightarrow a = -4$ și $b = 2$	3p
	2. a) funcția este impară	3p
	finalizare	2p
	b) $\int g(x)dx = \left(x^4 + \frac{x^2}{2} \right) \ln x - \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{4} + C$	2p
	determinarea primitivei	3p
	c) $\int_0^b f(x)dx - \int_0^a f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$	3p
	$f(x) > 0, \forall x \in [a, b]$, deci obținem inegalitatea adevărată	2p